Zur globalen Theorie der konfluenten Heunschen Differentialgleichung

Dissertation

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt von
Stephan Schultze
aus Konstanz

Januar 2006

Fachbereich Mathematik
Universität Duisburg-Essen

Gutachter: Prof. Dr. D. Schmidt (Universität Duisburg-Essen)
Prof. Dr. R. Schäfke (Louis-Pasteur-Universität Strasbourg)

Die Disputation fand am 28. April 2006 statt.

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

Die *Heunsche* Differentialgleichung, benannt nach dem deutschen Mathematiker Karl Heun, ist eine Fuchssche Differentialgleichung mit genau vier einfachen Singularitäten. Sie ist die natürliche Verallgemeinerung der hypergeometrischen Differentialgleichung, die ebenfalls eine Fuchssche Differentialgleichung ist und die drei einfache Singularitäten hat.
Ähnlich wie bei der Herleitung der *konfluenten hypergeometrischen* Differentialgleichung aus der *hypergeometrischen* Differentialgleichung durch den Prozess der Konfluenz, bei dem aus zwei oder mehr Singularitäten eine Singularität höherer Ordnung entsteht (siehe [12]), erhält man aus der *Heunschen* Differentialgleichung durch Konfluenz im wesentlichen vier neue interessante Differentialgleichungen:
Die *konfluente Heunsche* Differentialgleichung, die *bikonfluente Heunsche* Differentialgleichung, die *doppeltkonfluente Heunsche* Differentialgleichung und die *trikonfluente Heunsche* Differentialgleichung (siehe [12]).
In der vorliegenden Arbeit betrachten wir die *konfluente Heunsche* Differentialgleichung, die durch das Zusammenfließen von zwei regulären Singularitäten zu einer irregulären Singularität entsteht.
Als spezielle *konfluente Fuchssche* Differentialgleichung tritt die *Konfluente Heunsche* Differentialgleichung ebenfalls direkt bei der Separation eines verallgemeinerten Schrödingeroperators in allgemeinen elliptischen Koordinaten auf (vgl.[20]).
Wir legen die *konfluente Heunsche* Differentialgleichung nun in der folgenden Form zugrunde:

$$\begin{aligned}\eta'' &+ \left[\frac{1-\alpha_0}{z} + \frac{1-\alpha_1}{z-1} - \gamma\right]\eta' \\ &+ \left[\frac{1}{2}\frac{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)}{z(z-1)} + \frac{\beta_0 - \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_0)}{z} + \frac{\beta_1 - \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_1)}{z-1}\right]\eta = 0.\end{aligned}$$

Die unabhängige Variable z sowie die 5 Parameter $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma$ seien komplexwertig. Diese komplexe lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung hat bezüglich der unabhängigen Variablen z zwei reguläre Singularitäten bei 0 und 1 und eine irreguläre Singularität vom Rang höchstens 1 bei ∞. Alle anderen Stellen in $\mathbb{C}$ sind reguläre Stellen der Differentialgleichung.
Wir wissen aufgrund der allgemeinen Theorie, dass für die einfachen Singularitäten 0 und 1 Fundamentalsysteme von Frobeniuslösungen existieren und es für die irreguläre Singularität ∞ Fundamentalsysteme von Lösungen der Differentialgleichung gibt, welche durch ihr spezielles asymptotisches Verhalten auf bestimmten Sektoren charakterisiert werden. Die Grenzen dieser Sektoren, die Stokesschen Linien, sind abhängig vom Argument von γ. Daher erweist es sich als sinnvoll, γ auf der Riemannsche Fläche des Logarithmus $\widehat{\mathbb{C}^*}$ variieren zu lassen.
Das Ziel dieser Arbeit ist es, das globale Verhalten der Lösungen der *konfluenten Heunschen* Differentialgleichung hinsichtlich der unabhängigen Variable z sowie der Para-

meter zu untersuchen.
Da sich jede Lösung längs jeder Kurve in $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ analytisch fortsetzen lässt, führen wir hier explizit die - bis auf Isomorphie eindeutige - universelle Überlagerungsfläche $\widehat{\Omega}$ von $\Omega := \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$ ein und untersuchen das Verhalten der globalen Lösungen auf $\widehat{\Omega}$. Hierbei verwenden wir in konsequenter Weise Riemannsche Flächen, was in diesem Umfang bisher für die Heunschen Differentialgleichungen nicht durchgeführt wurde.
Indem systematisch das Transformationsverhalten der Differentialgleichung und ihrer Lösungen studiert wird, zeigt es sich, wie schon bei der hypergeometrischen und der konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichung, dass sich die gesamte Theorie der *konfluenten Heunschen* Differentialgleichung mit Hilfe einer einzigen Funktion Φ aufbauen lässt.
Hierbei verwenden wir globale Transformationen, die sich aus den üblichen Indextransformationen und Variablentransformationen, einschließlich der Decktransformationen zusammensetzen, sowie auch verallgemeinerte Laplacetransformationen.
Zudem ergibt sich, dass sich alle Zusammenhangs- und Monodromiematrizen im wesentlichen wieder mit Hilfe einer einzigen Funktion darstellen lassen.
Ein Hauptanliegen dieser Arbeit ist die Gewinnung globaler Darstellungen von Lösungen einerseits anhand von Reihenentwicklungen nach *hypergeometrischen* Funktionen andererseits anhand von Reihenentwicklungen nach *konfluenten hypergeometrischen* Funktionen und die Aufdeckung eines Zusammenhangs zwischen diesen beiden Darstellungen. Hierzu wird eine Verallgemeinerung des in [18] verwendeten Konzepts der analytischen Äquivalenz benutzt.
Solche Darstellungen liefern die Arbeiten [19], [10] und [18] für jeweils große Klassen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, zu denen auch die *konfluente Heunsche* Differentialgleichung gehört. Aus den genannten Arbeiten ist jedoch kein Zusammenhang zwischen den Darstellungen mit Hilfe von hypergeometrischen Funktionen und den Darstellungen mit Hilfe von konfluenten hypergeometrischen Funktionen erkennbar.
Das wesentliche Prinzip für die Gewinnung globaler Darstellungen in dieser Arbeit ist das (zweifache) Auftreten der *konfluenten Heunschen* Differentialgleichung bei der Separation einer (verallgemeinerten) *Schrödingergleichung* in elliptische Koordinaten und deren simultane Separierbarkeit in Kugelkoordinaten, wobei *hypergeometrische* und *konfluente hypergeometrische* Differentialgleichungen auftreten.
Dieses Prinzip ist nicht neu, da es die Autoren der Arbeit [11] verwenden, um verallgemeinerte Sphäroidfunktionen nach Zylinderfunktionen und hypergeometrischen Funktionen zu entwickeln.
Um nun globale Darstellungen der *konfluenten Heunschen* Differentialgleichung zu erhalten, verwenden wir folgende Vorgehensweise: Wir stellen die (verallgemeinerten) elliptischen Koordinaten als Funktionen von Kugelkoordinaten dar, wobei wir diese zweckmäßigerweise wieder in den entsprechenden Überlagerungsflächen variieren lassen.
Hierüber erhalten wir Darstellungen von (separierten) Lösungen der *Schrödingergleichung* bezüglich elliptischer Koordinaten mit Hilfe separierter Lösungen bezüglich Kugel-

koordinaten. Mit Hilfe von Grenzwertbetrachtungen lassen sich dann auch die in den Arbeiten [19], [10] und [18] erhaltenden Darstellungen gewinnen und Zusammenhänge zwischen diesen erkennen.

In **Kapitel 1** führen wir die *konfluente Heunsche* Differentialgleichung ein und geben den *Schrödingeroperator* an, bei dessen Separationen bezüglich verschiedener Koordinantensysteme die *konfluente Heunsche*, die *hypergeometrische* und die *konfluente hypergeometrische* Differentialgleichung entstehen.

Im **zweiten Kapitel** behandeln wir die Grundlage der Riemannschen Flächen beziehungsweise der universellen Überlagerungsflächen $\widehat{\Omega}$ und $\widehat{\mathbb{C}^*}$ und erläutern für diese die wichtigsten topologischen und analytischen Begriffe wie Decktransformationen und biholomorphe Transformationen, sowie Kurvenintegrale und Lösungen von Differentialgleichungen.

Kapitel 3 untersucht Integraldarstellungen für Lösungen der *konfluenten Heunschen* Differentialgleichung. Es werden dabei Kerne der Form $K(z,t) = k(z \cdot t)$ und $K(z,t) = k(z+t)$ studiert, sowie Kerne, die sich aus der simultanen Separierbarkeit der *Schrödingergleichung* gewinnen lassen.

Im **vierten Kapitel** wird das Transformationsverhalten der Lösungen untersucht.

Hierfür werden eine Reihe von globalen Transformationen sowie dazugehörige Parametertransformationen mit Hilfe der üblichen Indextransformationen und Variablentransformationen, einschließlich der Decktransformationen eingeführt. Ferner werden Eigenschaften der durch die Transformationen gebildeten Gruppe analysiert.

Anhand der im dritten Kapitel besprochenen Integralrelationen werden verallgemeinerte Laplacetransformationen mit zugehörigen Parametertransformationen definiert und deren Verhalten im Bezug auf andere Transformationen diskutiert.

Der zentrale analytische Teil der Arbeit beginnt im **fünften Kapitel**.

In Abschnitt 5.1 wird eine Funktion Φ eingeführt, mit der dann die Fundamentalsysteme von Frobeniuslösungen bei 0 und 1 mit den in Kapitel 4 definierten Transformationen dargestellt werden. Ferner untersucht dieser Abschnitt das Transformationsverhalten der einzelnen Fundamentalsysteme.

In Abschnitt 5.2 werden die asymptotischen Lösungen anhand von verallgemeinerten Laplacetransformationen angegeben, sowie deren Transformationsverhalten und deren Monodromieverhalten untersucht. Bei der Beschreibung des letzteren wird eine Parameterfunktion $\tilde{q}$ eingeführt.

Am Ende des Kapitels werden noch einige Integraldarstellungen von Lösungen angegeben.

Kapitel 6 befaßt sich ausschließlich mit den Zusammenhangsproblemen der einzelnen Fundamentalsysteme und den hierzu benötigten Funktionen q und ζ. Hierbei stellt sich heraus, daß sich $\tilde{q}$ mit Hilfe von q und q mit Hilfe ζ darstellen lässt.

Zum besseren Verständnis werden an einigen Stellen der Kapitel 3, 4, 5 und 6 die Ergebnisse zur lokalen Theorie aus meiner Diplomarbeit [21] wiederholt.

Zu Anfang des **siebten Kapitels** werden Gebiete angegeben, in denen sich verallgemeinerte elliptische Koordinaten $(\xi_1, \xi_2) \in \Omega^2$ als Funktionen von verallgemeinerten Kugelkoordinaten $(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{C}^* \times \Omega$ darstellen lassen. Ferner untersuchen wir das analy-

tische Verhalten dieser Funktionen. Durch Verknüpfung dieser mit den entsprechenden Projektionen der universellen Überlagerungsflächen $\widehat{\mathbb{C}^*}$ und $\widehat{\Omega}$ erhalten wir komplexwertige Funktionen, deren Definitionsbereich eine Teilmenge von $\widehat{\mathbb{C}^*} \times \widehat{\Omega}$ ist. Wird dieser geeignet eingeschränkt, so findet man Liftungen dieser Funktionen, deren Wertebereich in $\widehat{\Omega}$ liegt. Zudem werden einige Eigenschaften der Liftungen untersucht.
Das Hauptresultat des letzten Kapitels, **Kapitel 8**, ist die Gewinnung globaler Darstellungen von Lösungen der konfluenten Heunschen Differentialgleichung anhand von Reihen nach hypergeometrischen und konfluenten hypergeometrischen Funktionen sowie die Aufdeckung eines Zusammenhangs dieser Darstellungen. In den Abschnitten 8.1, 8.2, 8.3 und 8.4 werden bekannte Tatsachen aus dem Gebiet der hypergeometrischen und konfluenten hypergeometrischen Funktionen bzw. aus der Theorie der Biorthogonalentwicklungen in die hier benutzte Notation übersetzt. 8.5 stellt benötigte elementare Aussagen über charakteristische Exponenten zusammen. Mit den in Kapitel 7 erhaltenen Funktionen sowie einer Verallgemeinerung des Konzepts der analytsichen Äquivalenz aus Abschnitt 8.6 werden separierte Lösungen bzgl. elliptischer Koordinaten der im ersten Kapitel eingeführten Schrödingergleichung nach separierten Lösungen bzgl. Kugelkoordinaten entwickelt. Mit Hilfe von Grenzübergängen erhält man dann die gesuchten Entwicklungen.

Ich danke meinen beiden Lehrern Prof. Dr. Schmidt und Herrn Dr. Wolf für die Bereitstellung des Themas und die Geduld, die Sie mir entgegengebracht haben, sowie für die vielen wertvollen Hinweise und Anregungen, die ich von ihnen erhalten habe.

1 Einführung der konfluenten Heunschen Differentialgleichung

Unter einer allgemeinen konfluenten Heunschen Differentialgleichung versteht man eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' + a(z)y' + b(z)y = 0 \tag{1.1}$$

mit $a, b : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ meromorph, welche in $\hat{\mathbb{C}}$ genau drei voneinander verschiedene Singularitäten $z_0, z_1, z_2 \in \hat{\mathbb{C}}$ hat, von denen zwei $z_0, z_1 \in \hat{\mathbb{C}}$ einfache Singularitäten sind und die dritte $z_2 \in \hat{\mathbb{C}}$ eine irreguläre Singularität vom Rang höchstens 1 ist. Mit Hilfe der Laurentreihendarstellungen der Funktionen a, b bei den Singularitäten z_0, z_1 und z_2, findet man eine Darstellung der rationalen Funktionen a, b. Genaueres hierzu ist in [12] nachzulesen.
Mit Transformationen der Form

$$y(z) = \tilde{y}(\tilde{z}), \quad \tilde{z} = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0$$

ist (1.1) immer auf den Fall $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ und $z_2 = \infty$ zurückführen.
In diesem Fall gibt es *acht* Parameter $A_0, A_1, B_0, B_1, C_0, C_1, D, E \in \mathbb{C}$ mit denen sich die Differentialgleichung (1.1) in der Form

$$y'' + \left[\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z-1} + E\right] y' + \left[\frac{C_0}{z} + \frac{C_1}{z-1} + \frac{B_0}{z^2} + \frac{B_1}{(z-1)^2} + D\right] y = 0 \tag{1.2}$$

darstellen lässt.
Die Form (1.2) bleibt invariant unter Transfomationen des Typs

$$y(z) = z^{\nu_0}(z-1)^{\nu_1} \exp(\mu z)\, \tilde{y}(z), \quad \nu_0, \nu_1, \mu \in \mathbb{C}, \tag{1.3}$$

und

$$y(z) = \tilde{y}(\tilde{z}), \quad \tilde{z} = 1 - z, \tag{1.4}$$

wobei die zu (1.2) entsprechenden Parameter $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \tilde{B}_0, \tilde{B}_1, \tilde{C}_0, \tilde{C}_1, \tilde{D}, \tilde{E} \in \mathbb{C}$ sich im Fall (1.3) mittels

$$\begin{aligned}
&\tilde{A}_0 = A_0 + 2\nu_0,\ \tilde{A}_1 = A_1 + 2\nu_1,\ \tilde{B}_0 = B_0 + \nu_0(\nu_0 - 1 + A_0),\\
&\tilde{B}_1 = B_1 + \nu_1(\nu_1 - 1 + A_1),\ \tilde{C}_0 = C_0 + (\mu - \nu_1)(2\nu_0 + A_0) + \nu_0(E - A_1),\\
&\tilde{C}_1 = C_1 + (\mu + \nu_0)(2\nu_1 + A_1) + \nu_1(E + A_0),\ \tilde{D} = D + \mu(\mu + E),\\
&\tilde{E} = E + 2\mu
\end{aligned}$$

und im Fall (1.4) mittels

$$\tilde{A}_0 = A_1,\ \tilde{A}_1 = A_0,\ \tilde{B}_0 = B_1,\ \tilde{B}_1 = B_0,\ \tilde{C}_0 = -C_1,\ \tilde{C}_1 = -C_0,\ \tilde{D} = D,\ \tilde{E} = -E$$

umrechnen lassen.
Mit Hilfe der Indizes $\alpha_0, \alpha_0' \in \mathbb{C}$ bei z_0, der Indizes $\alpha_1, \alpha_1' \in \mathbb{C}$ bei z_1, der Exponenten $\gamma, \gamma' \in \mathbb{C}$ in ∞ und zweier *akzessorischer* Parameter $\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{C}$, lassen sich die Parameter in (1.2) wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned}
&A_0 = 1 - \alpha_0 - \alpha_0', \quad B_0 = \alpha_0\alpha_0', \quad A_1 = 1 - \alpha_1 - \alpha_1', \quad B_1 = \alpha_1\alpha_1', \\
&D = -\gamma - \gamma', \quad E = \gamma\gamma', \quad C_0 = \beta_0 - \frac{1}{2}\left(1 - \alpha_0 - \alpha_0'\right)\left(\gamma + \gamma' + 1 - \alpha_1 - \alpha_1'\right), \\
&C_1 = \beta_1 - \frac{1}{2}\left(1 - \alpha_1 - \alpha_1'\right)\left(\gamma + \gamma' - (1 - \alpha_0 - \alpha_0')\right).
\end{aligned}$$

Über die Transformation (1.3) mit $\nu_0 := \alpha_0'$, $\nu_1 := \alpha_1'$ und $\mu := \gamma'$ erhält man dann folgende *Normalform*

$$\begin{aligned}
\eta'' \;&+\; \left[\frac{1-\alpha_0}{z} + \frac{1-\alpha_1}{z-1} - \gamma\right]\eta' \\
&+\; \left[\frac{1}{2}\frac{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)}{z(z-1)} + \frac{\beta_0 - \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_0)}{z} + \frac{\beta_1 - \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_1)}{z-1}\right]\eta = 0,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

mit $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma \in \mathbb{C}$. Man vergleiche hierzu [13]. Die Anzahl der unabhängigen Parameter ist nun auf *fünf* gesunken.
Die Invarianz der Form (1.5) unter (1.4) und unter Transformationen des Typs (1.3), mit $\nu_0 \in \{0, \alpha_0\}$, $\nu_1 \in \{0, \alpha_1\}$ und $\mu \in \{0, \gamma\}$, ist auch hier gegeben.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird mit der *konfluenten Heunschen Differentialgleichung (CHE)* Differentialgleichung (1.5) gemeint sein.
Das Regularitätsgebiet der Differentialgleichung (1.5) bezeichnen wir mit

$$\Omega := \mathbb{C}\backslash\{0, 1\}.$$

1.1 Einordnung der hypergeometrischen Differentialgleichung und der konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichung

Im Fall

$$\gamma = 0 \text{ und } \beta_0 + \beta_1 = 0$$

entsteht aus der Differentialgleichung (1.5) die hypergeometrische Differentialgleichung

$$\eta'' + \left[\frac{1-\alpha_0}{z} + \frac{1-\alpha_1}{z-1}\right]\eta' + \left[\frac{\frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1) - \beta_0}{z(z-1)}\right]\eta = 0, \tag{1.6}$$

welche in ∞ eine einfache Singularität hat. Mit der Identifizierung

$$\alpha_0 = 1 - c,\; \beta_0 = -a\cdot b + \frac{1}{2}c(a+b+1-c),\; \alpha_1 = c - a - b,\; \beta_1 = a\cdot b - \frac{1}{2}c(a+b+1-c)$$

erhält man die in der Literatur am häufigsten verwendete Darstellung der hypergeometrischen Differentialgleichung

$$\eta'' + \left[\frac{c}{z} + \frac{1-c+a+b}{z-1}\right]\eta' + \frac{a\cdot b}{z(z-1)}\eta = 0.$$

Im Fall

$$\gamma \neq 0,\ \ \alpha_1 = 1 \text{ und } \beta_1 = 0$$

entsteht aus der Differentialgleichung (1.5)

$$\eta'' + \left[\frac{1-\alpha_0}{z} - \gamma\right]\eta' + \left[\frac{\beta_0 - \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_0)}{z}\right]\eta = 0, \tag{1.7}$$

bei der die isolierte Singularität 1 eine reguläre Stelle ist.

Über die Transformation

$$\eta(z) = \tilde{\eta}(\tilde{z}), \quad \tilde{z} := \gamma z$$

und der Identifizierung

$$c := 1-\alpha_0,\ \ a := \frac{1}{2}(1-\alpha_0) - \frac{\beta_0}{\gamma}$$

erhält man aus (1.7) die in der Literatur übliche *Normalform* der konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichung

$$z\eta'' + (c-z)\,\eta' - a\eta = 0. \tag{1.8}$$

1.2 Zur Separation eines verallgemeinerten Schrödingeroperators

Genauso wie sich durch Separation bezüglich verschiedener orthognaler Koordinatensysteme die *Schwingungsgleichung*

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

als Ursprung einer Vielzahl gewöhnlicher Differentialgleichungen der mathematischen Physik auffassen lässt (siehe [15]), erhält man auch die *CHE* über eine Separation einer *verallgemeinerten Schrödingergleichung.*
In der Arbeit [20] haben die Autoren gezeigt, dass die partielle Differentialgleichung

$$Aw = 0 \tag{1.9}$$

mit

$$A := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \sum_{j=1}^{2}\left(\frac{1-2\alpha_{j-1}}{x_j} - 2\gamma x_j\right)\frac{\partial}{\partial x_j} + 4\beta - 2\gamma(2-\alpha_0-\alpha_1),$$

für $\alpha_0, \alpha_1, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ sich bezüglich allgemeiner elliptischer Koordinaten $(\xi_1, \xi_2) \in \Omega^2$ in folgender Weise transformiert:
Sei $G \subset \Omega^2$ ein Gebiet und $\Phi^1 := (\Phi_1^1, \Phi_2^1) : G \to \mathbb{C}^2$ eine holomorphe Funktion mit

$$\left(\Phi_1^1\right)^2 (\xi_1, \xi_2) = \xi_1 \xi_2, \quad \left(\Phi_2^1\right)^2 (\xi_1, \xi_2) = (\xi_1 - 1)(1 - \xi_2), \text{ für } (\xi_1, \xi_2) \in G.$$

Dann gilt für alle $w : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $D \subset \mathbb{C}^2$ Gebiet:

$$\tilde{A}_1(w \circ \Phi^1) = (Aw) \circ \Phi^1,$$

mit:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1 \quad := \quad & \frac{1}{\xi_1 - \xi_2}\Bigg[4\xi_1(\xi_1 - 1)\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \left(\frac{1 - \alpha_0}{\xi_1} + \frac{1 - \alpha_1}{\xi_1 - 1} - \gamma\right)\frac{\partial}{\partial \xi_1}\right) \\ & -4\xi_2(\xi_2 - 1)\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} + \left(\frac{1 - \alpha_0}{\xi_2} + \frac{1 - \alpha_1}{\xi_2 - 1} - \gamma\right)\frac{\partial}{\partial \xi_2}\right)\Bigg] \\ & +4\beta - 2\gamma(2 - \alpha_0 - \alpha_1).\end{aligned} \tag{1.10}$$

Nun führen wir folgende Separation durch:
Seien $\tilde{w}_\kappa : U_\kappa \to \mathbb{C}$ $(\kappa = 1, 2)$ holomorphe Funktionen mit Gebieten $U_1, U_2 \subset \Omega$ so dass $G \subset U_1 \times U_2$ und sei $w : \mathbb{C}^2 \supset D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $\Phi^1(G) \subset D$, $w \neq 0$ und

$$w \circ \Phi^1(z_1, z_2) = \tilde{w}_1(z_1)\tilde{w}_2(z_2), \ (z_1, z_2) \in G.$$

Dann gilt: w ist Lösung von (1.9) genau dann wenn ein $\beta_0 \in \mathbb{C}$ existiert, so dass mit $\beta_1 := \beta - \beta_0$ die Funktionen $\tilde{w}_1$ und $\tilde{w}_2$ Lösungen der *CHE* (1.5)

$$\begin{aligned}y''(t) + \left(\frac{1 - \alpha_0}{t} + \frac{1 - \alpha_1}{t - 1} - \gamma\right)y'(t) + \frac{1}{t(t-1)}\Bigg(&\frac{1}{2}(1 - \alpha_0)(1 - \alpha_1) \\ & -\beta_0 + \frac{1}{2}\gamma(1 - \alpha_0) + t\left(\beta_0 + \beta_1 - \frac{1}{2}\gamma(2 - \alpha_0 - \alpha_1)\right)\Bigg)y = 0\end{aligned}$$

sind.

In [20] wurde gezeigt, dass sich die Gleichung (1.9) ebenfalls bezüglich verallgemeinerter Kugelkoordinaten $\eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{C}^* \times \Omega$ und verallgemeinerter kartesischer Koordinaten $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ separieren lässt. Hierdurch ergeben sich eine Vielzahl von Beziehungen, wie zum Beispiel Integralrelationen, der in diesem Zusammenhang auftretenden gewöhnlichen Differentialgleichungen.

(1.11) Bemerkung:
Für $j = 2,3$ seien $G_1^j, G_2^j \subset \mathbb{C}$ Gebiete, $G^j := G_1^j \times G_2^j$ und $\Phi^j := \left(\Phi_1^j, \Phi_2^j\right) : G^j \to \mathbb{C}^2$ holomorphe Funktionen mit:

i) $G_1^2 \subset \mathbb{C}^*, G_2^2 \subset \Omega$, $\left(\Phi_1^2\right)^2(\eta_1,\eta_2) = \eta_1\eta_2$, $\left(\Phi_2^2\right)^2(\eta_1,\eta_2) = \eta_1(1-\eta_2)$ für $(\eta_1,\eta_2) \in G^2$.

ii) $G_1^3, G_2^3 \subset \mathbb{C}^*$, $\left(\Phi_1^3\right)^2(\theta_1,\theta_2) = \theta_1$, $\left(\Phi_2^3\right)^2(\theta_1,\theta_2) = \theta_2$ für $(\theta_1,\theta_2) \in G^3$.

Dann gilt für alle $w : D \to \mathbb{C}$ holomorph, $D \subset \mathbb{C}^2$ Gebiet:

$$\tilde{A}_j(w \circ \Phi^j) = (Aw) \circ \Phi^j, \ (j = 2,3),$$

mit:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_2 \ &:= \ 4\eta_1 \frac{\partial^2}{\partial \eta_1^2} + 4\left(-\gamma\eta_1 + 2 - \alpha_0 - \alpha_1\right)\frac{\partial}{\partial \eta_1} + 4(\beta_0 + \beta_1) \\ &\quad -2\gamma(2-\alpha_0-\alpha_1) - \frac{4\eta_2(\eta_2-1)}{\eta_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta_2^2} + \left(\frac{1-\alpha_0}{\eta_2} + \frac{1-\alpha_1}{\eta_2-1}\right)\frac{\partial}{\partial \eta_2}\right), \end{aligned} \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_3 \ &:= \ 4\theta_1 \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} + \left(2(1-\alpha_0) - \gamma\theta_1\right)\frac{\partial}{\partial \theta_1} + \\ &\quad 4\theta_2 \frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} + \left(2(1-\alpha_1) - \gamma\theta_2\right)\frac{\partial}{\partial \theta_2} + 4(\beta_0+\beta_1) - 2\gamma(2-\alpha_0-\alpha_1). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Nun führen wir folgende Separationen durch:

(1.14) Bemerkung: *Sei $j = 2$ oder $j = 3$ betrachtet.*
Seien $\tilde{w}_\kappa : G_\kappa^j \to \mathbb{C}$ $(\kappa = 1,2)$ holomorphe Funktionen, und sei $w : \mathbb{C}^2 \supset D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $\Phi^j(G^j) \subset D$, $w \neq 0$ und

$$w \circ \Phi^j(z_1,z_2) = \tilde{w}_1(z_1)\tilde{w}_2(z_2), \ (z_1,z_2) \in G.$$

Dann gilt für

$j = 2$: w ist Lösung von (1.9) genau dann wenn ein $\nu \in \mathbb{C}$ existiert mit

$$\begin{aligned} &z\tilde{w}_1'' + (2-\alpha_0-\alpha_1-\gamma z)\,\tilde{w}_1' \\ &+ \left(\beta_0+\beta_1 - \frac{1}{2}\gamma(2-\alpha_0-\alpha_1) + \frac{\nu(\alpha_0+\alpha_1-1-\nu)}{z}\right)\tilde{w}_1 = 0 \end{aligned} \tag{1.15}$$

und

$$\tilde{w}_2'' + \left(\frac{1-\alpha_0}{z} + \frac{1-\alpha_1}{z-1}\right)\tilde{w}_2' + \frac{\nu(\alpha_0+\alpha_1-1-\nu)}{z(z-1)}\tilde{w}_2 = 0; \tag{1.16}$$

$j = 3$: w ist Lösung von (1.9) genau dann wenn ein $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert mit

$$z\tilde{w}_1'' + (1 - \alpha_0 - \gamma z)\,\tilde{w}_1' + \left(\beta_0 + \beta_1 - \frac{1}{2}\gamma(2 - \alpha_0 - \alpha_1) - \lambda\right)\tilde{w}_1 = 0 \qquad (1.17)$$

und

$$z\tilde{w}_2'' + (1 - \alpha_1 - \gamma z)\,\tilde{w}_2' + \lambda\tilde{w}_2 = 0. \qquad (1.18)$$

Bei der Differentialgleichung (1.15) handelt es sich um eine transformierte konfluente hypergeometrische Differentialgleichung und bei (1.16) um eine hypergeometrische Differentialgleichung.
(1.17) und (1.18) sind jeweils transformierte konfluente hypergeometrische Differentialgleichungen.

2 Zum Definitionsbereich globaler Lösungen

Sei $X \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet in $\mathbb{C}$.
Gemäß der Bemerkung (9.18) aus dem Anhang bezeichnen wir mit $P^X : \widehat{X} \to X$ die, bis auf Isomorphie eindeutige, universelle Überlagerung von X.
Dann lässt sich $\widehat{X}$ mit der vom Atlas

$$\mathcal{A}_X := \{P^X|_U : U \to X|\ U \subset \widehat{X} \text{ Gebiet},\ P^X|_U : U \to P^X(U) \text{ bijektiv}\}$$

erzeugten komplexen Struktur auf natürliche Weise als Riemannsche Fläche auffassen.
Wir betrachten hier die Spezialfälle $X = \Omega$ und $X = \mathbb{C}^*$ und bezeichnen abkürzend

$$P := P^\Omega : \widehat{\Omega} \to \Omega \text{ und } \tilde{P} := P^{\mathbb{C}^*} : \widehat{\mathbb{C}^*} \to \mathbb{C}.$$

Um einen Bezugspunkt auf $\widehat{\Omega}$ zu erhalten wählen wir einen Punkt $\hat{\omega}_0 \in \widehat{\Omega}$ fest mit der Eigenschaft:

$$P(\hat{\omega}_0) = \frac{1}{2}.$$

Mit Hilfe der für die lokale Theorie wichtigen Teilmengen von Ω

$$\Omega_+ := \mathbb{C}\backslash]-\infty, 1],\ \Omega_- := \mathbb{C}\backslash[0, \infty[,\ \Omega_0 := \mathbb{C}\backslash\left(]-\infty, 0] \cup [1, \infty[\right) \text{ und } \Omega_\infty := \mathbb{C}\backslash[0, 1]$$

bezeichnen wir außerdem noch einige Punkte und Teilgebiete von $\widehat{\Omega}$.

(2.1) Definition:
Die Punkte $\hat{\omega}_{-1}, \hat{\omega}_+, \hat{\omega}_- \in \widehat{\Omega}$ und die Gebiete $\widehat{\Omega}_0, \widehat{\Omega}_+, \widehat{\Omega}_-, \widehat{\Omega}_\infty^+, \widehat{\Omega}_\infty^- \subset \widehat{\Omega}$ sind wie folgt eindeutig festgelegt:

1. *$\widehat{\Omega}_0$ sei die Zusammenhangskomponente von $P^{-1}(\Omega_0)$, welche $\hat{\omega}_0$ enthält.*
2. *Mit $\hat{\omega}_+, \hat{\omega}_- \in \widehat{\Omega}_0$ seien die Punkte bezeichnet, welche $P(\hat{\omega}_+) = \frac{1}{2} + \frac{i}{\sqrt{2}} =: \omega_+$ und $P(\hat{\omega}_-) = \frac{1}{2} - \frac{i}{\sqrt{2}} =: \omega_-$ erfüllen.*
3. *$\widehat{\Omega}_+$ sei die Zusammenhangskomponente von $P^{-1}(\Omega_+)$, welche $\hat{\omega}_+$ enthält, und $\widehat{\Omega}_-$ die Zusammenhangskomponente von $P^{-1}(\Omega_-)$, welche $\hat{\omega}_-$ enthält.*
4. *$\hat{\omega}_{-1} \in \widehat{\Omega}_-$ sei der Punkt, welcher $P(\hat{\omega}_{-1}) = -1$ erfüllt.*
5. *Mit $\widehat{\Omega}_\infty^+$ und $\widehat{\Omega}_\infty^-$ bezeichnen wir die Zusammenhangskomponenten von $P^{-1}(\Omega_\infty)$, welche durch $\hat{\omega}_+ \in \widehat{\Omega}_\infty^+$ und $\hat{\omega}_- \in \widehat{\Omega}_\infty^-$ festgelegt sind.*

Die Doppel-Bezeichnungen für $\widehat{\Omega}_0, \widehat{\Omega}_\pm$, und $\widehat{\Omega}_\infty^\pm$ sind widerspruchsfrei, da für $Y = \widehat{\Omega}_0, \widehat{\Omega}_\pm, \widehat{\Omega}_\infty^\pm$ aus (2.1) gilt: $P|_Y : Y \to P(Y)$ ist universelle Überlagerung. Dies folgt nach Satz(9.16) aus dem Anhang für $Y = \widehat{\Omega}_0, \widehat{\Omega}_\pm$, da diese einfach zusammenhängend sind, und für $Y = \widehat{\Omega}_\infty^\pm$ aus Satz (9.20) aus dem Anhang aufgrund der folgenden Bemerkungen:

Da die Menge $\Omega \cup \{\infty\}$ mit der entsprechenden komplexen Struktur eine nichtkompakte Riemannsche Fläche ist und es nach dem Riemannschen Abbildungssatz eine biholomorphe Abbildung $z : \Omega_\infty \cup \{\infty\} \to K_1(0)$ mit $z(\infty) = 0$ gibt, lässt sich der Satz (9.20) aus dem Anhang anwenden, und man erhält:
Für alle Zusammenhangskomponenten $\hat{M}$ von $P^{-1}(\Omega_\infty)$ sind die Abbildungen $P : \hat{M} \to \Omega_\infty$ universelle Überlagerungen von Ω_∞.

Mit Hilfe des Punktes $\hat{\omega}_+$ definieren wir folgende Kurven (Abbildung 1), auf die wir bei der Einführung von Decktransformationen noch zu sprechen kommen:

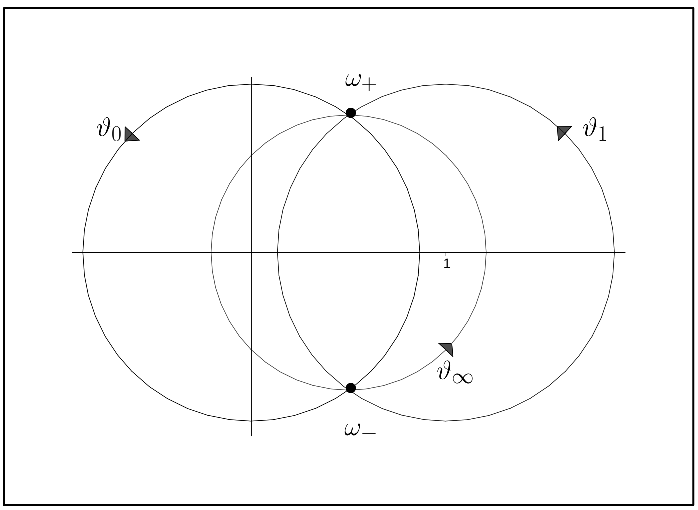
(2.2) Definition: *Mit ϑ_0, ϑ_1 und ϑ_∞ werden die folgenden, bei ω_+ startenden, Kurven bezeichnet:*

1. $\vartheta_0 : [0,1] \ni t \to \omega_+ \exp(2\pi i t) \in \Omega$ *umläuft einmal den Nullpunkt auf einer Kreisbahn in positiver Richtung.*

2. $\vartheta_1 : [0,1] \ni t \to 1 - \omega_- \exp(2\pi i t) \in \Omega$ *umläuft einmal die* 1 *auf einer Kreisbahn in positiver Richtung .*

3. $\vartheta_\infty : [0,1] \ni t \to \frac{1}{2} + \frac{i}{\sqrt{2}} \exp(2\pi i t) \in \Omega$ *umläuft einmal* $[0,1]$ *auf einer Kreisbahn in positiver Richtung.*

Abbildung 1: Spuren von $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_\infty$



Für $l \in \{0, 1, \infty\}$ bezeichnen wir mit $\hat{\vartheta}_l : [0,1] \to \widehat{\Omega}$ die durch $\hat{\vartheta}_l(0) = \hat{\omega}_+$ eindeutig bestimmte Liftung von ϑ_l (siehe (9.9) aus dem Anhang).

Die Einführung der Riemannschen Fläche $\widehat{\mathbb{C}^*}$ geschieht aus zwei Gründen:
Zum einen stellt sich bei der Untersuchung des globalen Verhaltens der Lösungen der *CHE* heraus, dass es im Fall $\gamma \neq 0$ sinnvoll ist, die Lösungen in Abhängigkeit vom

Parameter $\hat{\gamma} \in \widehat{\mathbb{C}^*}$ mit $\tilde{P}(\hat{\gamma}) = \gamma$ anstatt von $\gamma \in \mathbb{C}$ zu beschreiben. Daher müsste der Fall $\gamma = 0$ separat behandelt werden, worauf wir jedoch verzichten.
Zum anderen werden wir aufgrund von (1.14) globale Lösungen konfluenter hypergeometrischer Differentialgleichungen betrachten. Der natürliche Definitionsbereich dieser Lösungen ist $\widehat{\mathbb{C}^*}$.

Um einen Bezugspunkt auf $\widehat{\mathbb{C}^*}$ zu erhalten, wählen wir einen Punkt $\hat{\gamma}_0 \in \widehat{\mathbb{C}^*}$ fest mit der Eigenschaft:

$$\tilde{P}(\hat{\gamma}_0) = 1.$$

(2.3) Definition: *Die Punkte $\hat{\gamma}_+, \hat{\gamma}_- \in \widehat{\mathbb{C}^*}$ und das Gebiet $\widehat{\mathbb{C}^*}_+ \subset \widehat{\mathbb{C}^*}$ sind wie folgt eindeutig bestimmt:*

1. *Die Zusammenhangskomponente von $\tilde{P}^{-1}\left(\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]\right)$, welche $\hat{\gamma}_0$ enthält, bezeichnen wir mit $\widehat{\mathbb{C}^*}_+$.*

2. *Mit $\hat{\gamma}_+, \hat{\gamma}_- \in \widehat{\mathbb{C}^*}_+$ seien die Punkte bezeichnet, welche $\tilde{P}\left(\hat{\gamma}_+\right) = 2$ und $\tilde{P}\left(\hat{\gamma}_-\right) = \frac{1}{2}$ erfüllen.*

Wir benötigen im weiteren die Differentiation und Integration komplexwertiger Funktionen mit Definitionsbereich in $\widehat{X}$.
Um den Formalismus dieser Arbeit zu begrenzen, wird im folgenden auf die Verwendung von Differentialformen verzichtet. Die Sätze und Definitionen im nachfolgenden Text lassen sich aber auch mit Hilfe von Differentialformen formulieren. (Siehe [3].)

(2.4) Bemerkung, Definition: *Sei $G \subset \widehat{X}$ eine offene Menge.*

i) *Eine Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ heißt holomorph genau dann, wenn*

$$\forall P^X|_U \in \mathcal{A}_X \text{ mit } U \subset G : f \circ (P^X|_U)^{-1} : P^X(U) \to \mathbb{C}$$

im üblichen Sinne holomorph ist. Wir bezeichnen

$$f'(\hat{x}) := \left(f \circ (P^X|_U)^{-1}\right)' \circ P^X\left(\hat{x}\right), \ P^X|_U \in \mathcal{A}_X \text{ mit } \hat{x} \in U \subset G$$

als die Ableitung von f an der Stelle $\hat{x}$, da diese Definition in bekannter Weise unabhängig von der Wahl von U ist. Die Funktion $f' : G \to \mathbb{C}$ heißt Ableitungsfunktion von f.
Wir bezeichnen mit $f^{(0)}$ die Funktion f selbst und induktiv mit $f^{(n)} : G \to \mathbb{C}$ die Ableitungsfunktion von $f^{(n-1)} : G \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Die Menge $\mathcal{H}(G)$ aller in G holomorpher Funktionen definieren wir durch

$$\mathcal{H}(G) := \{f : G \to \mathbb{C} |\ f \text{ holomorph}\}.$$

Ist $F : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktionen mit $F' = f$, so heißt F eine Stammfunktion von f.

ii) *Sei $Y \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \widehat{Y}$ eine stetige Funktion. f heißt holomorph, genau dann wenn $P^Y \circ f : G \to \mathbb{C}$ im Sinne von i) holomorph ist. Sie heißt biholomorph genau dann, wenn f bijektiv und f, f^{-1} holomorph sind.*

iii) *Seien $Y \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $g : G \to \widehat{Y}$ holomorph und $f \in \mathcal{H}\left(\widehat{Y}\right)$. Dann ist*

$$h := f \circ g \in \mathcal{H}(G) \ \text{ mit } h'(\hat{z}) = f'(g(\hat{z}))\left(P^Y \circ g\right)'(\hat{z}), \ \hat{z} \in G.$$

iv) *Seien $2 \leq n \in \mathbb{N}$, $X_k \subset \mathbb{C}$ Gebiete, $Y_k \in \left\{X_k, \hat{X}_k\right\}$, $k = 1, ..., n$, $f : \bigotimes_{k=1}^{n} Y_k \to \mathbb{C}$ und $j \in \{1, ..., n\}$.*
f heißt in der j-ten Komponente partiell holomorph genau dann, wenn für alle $(y_1, ..., y_{j-1}, y_{j+1}, ..., y_n) \in \bigotimes_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n} Y_l$: $f(y_1, ..., y_{j-1}, \cdot, y_{j+1}, ..., y_n) \in \mathcal{H}(Y_j)$. Wir bezeichnen $\partial_j f(y_1, ..., y_n) := f'(y_1, ..., y_{j-1}, \cdot, y_{j+1}, ..., y_n)(y_j)$.
f heißt partiell holomorph wenn f bezüglich aller Komponenten partiell holomorph ist.
Nach einem Satz von Hartog folgt aus der partiellen Holomorphie die Stetigkeit von f. Diesen Satz findet man in [4],[22].

Beweis von iii):
Sei $\hat{z}_0 \in G$ und $P^Y|_W \in \mathcal{A}_Y$ mit $g(\hat{z}_0) \in W \subset \widehat{Y}$. Aus der Stetigkeit von g folgt die Existenz einer Karte $P^X|_U \in \mathcal{A}_X$ mit $\hat{z}_0 \in U \subset G$ und $g(U) \subset W$. Dann gilt

$$h \circ \left(P^X|_U\right)^{-1} = f \circ g \circ \left(P^X|_U\right)^{-1} = f \circ \left(P^Y|_W\right)^{-1} \circ P^Y \circ g \circ \left(P^X|_U\right)^{-1}.$$

Somit ist h holomorph mit

$$\begin{aligned} h'(\hat{z}_0) &= \left(f \circ \left(P^Y|_W\right)^{-1} \circ P^Y \circ g \circ \left(P^X|_U\right)^{-1}\right)' \left(P^X(\hat{z}_0)\right) \\ &= \left(f \circ \left(P^Y|_W\right)^{-1}\right)' \circ P^Y(g(\hat{z}_0)) \left(P^Y \circ g \circ \left(P^X|_U\right)^{-1}\right)' (P(\hat{z}_0)) \\ &= f'(g(\hat{z}_0)) \left(P^Y \circ g\right)'(\hat{z}_0). \end{aligned}$$

□

Die Holomorphie der Projektion $P^X : \widehat{X} \to X$, mit $\left(P^X\right)'(\hat{z}) = 1$ für $\hat{z} \in \widehat{X}$, ist sofort ersichtlich.

(2.5) Bemerkung, Definition:
Sei $G \subset \widehat{X}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.

i) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $\hat{\varphi} : [a,b] \to G$ eine Kurve, deren Projektion $P^X \circ \hat{\varphi}$ stückweise stetig-differenzierbar ist. Dann gibt es eine Zerlegung

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n = b \text{ von } [a,b],$$

mit $P^X \circ \hat{\varphi}|_{[t_{k-1},t_k]}$ stetig-differenzierbar für $k \in \{1,...,n\}$ und Gebiete $U_k \subset G$ mit

$$\hat{\varphi}([t_{k-1},t_k]) \subset U_k,\ P^X : U_k \to P^X(U_k) \text{ bijektiv},\ k \in \{1,...,n\}.$$

Hiermit definieren wir

$$\int_{\hat{\varphi}} f := \sum_{k=1}^{n} \int_{P^X \circ \hat{\varphi}|_{[t_{k-1},t_k]}} f \circ \left(P^X|_{U_k}\right)^{-1}(z)dz.$$

In bekannter Weise folgt die Unabhängigkeit des Integrals bezüglich der Zerlegung und somit die Wohldefiniertheit des Integrals.

ii) Ist $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $F : G \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion zu f und $\hat{\varphi} : [a,b] \to G$ eine Kurve wie unter i), so folgt auch hier:

$$\int_{\hat{\varphi}} f = F(\hat{\varphi}(b)) - F(\hat{\varphi}(a)).$$

iii) Uneigentliche Integrale:

Seien $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (bzw. $b \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$) mit $a < b$ und $\hat{\varphi} : [a,b[\to G$ (bzw. $\hat{\varphi} :]a,b] \to G$) eine Kurve, deren Projektion $P^X \circ \hat{\varphi}$ stückweise stetig-differenzierbar ist. Dann bezeichnen wir

$$\int_{\hat{\varphi}} f := \lim_{\xi \to b} \int_{\hat{\varphi}|_{[a,\xi]}} f, \quad \left(\text{bzw. } \int_{\hat{\varphi}} f := \lim_{\xi \to a} \int_{\hat{\varphi}|_{[\xi,b]}} f\right),$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ mit $a < b$ und $\hat{\varphi} :]a,b[\to G$ eine Kurve, deren Projektion $P^X \circ \hat{\varphi}$ stückweise stetig-differenzierbar ist. Dann definieren wir mit einem $\rho \in]a,b[$

$$\int_{\hat{\varphi}} f := \int_{\hat{\varphi}|_{]a,\rho]}} f + \int_{\hat{\varphi}|_{[\rho,b[}} f.$$

In bekannter Weise folgt die Unabhängigkeit des Integrals bezüglich ρ und somit die Wohldefiniertheit des Integrals.

Im folgenden wollen wir einen für unseren Zweck sinnvollen Begriff der globalen Lösung einer linearen Differentialgleichung einführen. Hierzu benötigen wir den Begriff der analytischen Fortsetzung:

(2.6) Bemerkung, Definition: *Sei $G \subset X$ Gebiet und $\eta : G \to \mathbb{C}$ holomorph.*

i) Für ein $\hat{x} \in \widehat{X}$ bezeichnen wir eine holomorphe Funktion $y : \widehat{X} \to \mathbb{C}$ als analytische Fortsetzung von η <u>bei $\hat{x}$</u>

$$:\Leftrightarrow \exists U \subset \left(P^X\right)^{-1}(G) \text{ offen, mit } \hat{x} \in U \text{ und } y(u) = \eta(P^X(u)) \ \forall u \in U.$$

ii) Eine holomorphe Funktion $y : \widehat{X} \to \mathbb{C}$ bezeichnen wir als analytische Fortsetzung von η, wenn es ein $\hat{x} \in \widehat{X}$ gibt, so dass y analytische Fortsetzung von η bei $\hat{x}$ ist.

Wir betrachten eine lineare Differentialgleichung der Form

$$\eta^{(n)}(z) + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}(z)\eta^{(k)}(z) = b(z) \tag{2.7}$$

mit holomorphen Koeffizienten a_j $(j = 1, ..., n)$ und holomorpher Inhomogenität b auf X. Aus der allgemeinen Theorie ist bekannt, dass sich Lösungen dieser Differentialgleichung (2.7) längs jeder Kurve in X analytisch fortsetzen lassen. Sei nun $\eta : G \to \mathbb{C}$ eine solche Lösung in einem Gebiet $G \subset X$ und $U \subset \widehat{X}$ eine Umgebung eines Punktes $a \in \widehat{X}$ mit $P(U) \subset G$. Dann lässt sich $\hat{\eta} : U \ni \hat{x} \to \eta \circ P(\hat{x}) \in \mathbb{C}$ auf natürliche Weise längs jeder Kurve in $\widehat{X}$ mit Anfangspunkt a analytisch fortsetzen. Da $\widehat{X}$ einfach zusammenhängend ist, existiert eine eindeutige analytische Fortsetzung von $\hat{\eta}$ auf $\widehat{X}$ (Satz(9.21) aus dem Anhang). Dies rechtfertigt, sich auf globale Lösungen, die auf ganz $\widehat{X}$ definiert sind, zu beschränken:

(2.8) Bemerkung, Definition:
$y : \widehat{X} \to \mathbb{C}$ holomorph heißt (globale) Lösung von (2.7)

$$\begin{aligned} :\Leftrightarrow \quad & \exists \varphi \in \mathcal{A}_X : \ y \circ \varphi^{-1} \text{ist Lösung von(2.7).} \\ \Leftrightarrow \quad & \forall \varphi \in \mathcal{A}_X : y \circ \varphi^{-1} \text{ist Lösung von (2.7).} \end{aligned}$$

Hiermit folgt dann auf übliche Weise:

(2.9) Satz: *Seien $\hat{x}_0 \in \widehat{X}$ und $b_1, b_2, .., b_n \in \mathbb{C}$. Dann gibt es zu der Anfangswertaufgabe (2.7) mit $y^{(\kappa-1)}(\hat{x}_0) = b_\kappa$, $\kappa \in \{1, 2, .., n\}$ genau eine Lösung $y : \widehat{X} \to \mathbb{C}$.*

Mit Hilfe von (2.9) lassen sich nun Logarithmus-, Argument- und Potenzfunktionen auf $\widehat{\Omega}$ und $\widehat{\mathbb{C}^*}$ definieren.
Der Hauptzweig des Logarithmus Ln auf Ω_0 erfüllt die inhomogene Differentialgleichung $\eta'(z) = z^{-1}$ und lässt sich somit über (2.7) und (2.8) wie folgt verallgemeinern:

(2.10) Definition:

1. *Mit* $\ln_0 : \widehat{\Omega} \to \mathbb{C}$ *bezeichnen wir die eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe* $\eta'(z) = z^{-1}$ *mit* $\ln_0(\hat{\omega}_0) = \operatorname{Ln}\left(\frac{1}{2}\right)$.
   Hiermit definieren wir $\hat{z}^\alpha := \exp(\alpha \ln_0(\hat{z}))$ *für* $\alpha \in \mathbb{C}$ *und* $\hat{z} \in \widehat{\Omega}$*, sowie die Argumentfunktion* $\arg_0 := \operatorname{Im} \circ \ln_0$.

2. *Mit* $\ln_1 : \widehat{\Omega} \to \mathbb{C}$ *bezeichnen wir die eindeutige Lösung der AWA* $\eta'(z) = (z-1)^{-1}$ *mit* $\ln_1(\hat{\omega}_0) = \operatorname{Ln}\left(\frac{1}{2}\right) + i\pi$.
   Hiermit definieren wir:

$$(\hat{z}-1)^\alpha := \exp(\alpha \ln_1(\hat{z})) \text{ und } (1-\hat{z})^\alpha := \exp(-i\pi\alpha)(\hat{z}-1)^\alpha$$

   für $\alpha \in \mathbb{C}$ *und* $\hat{z} \in \widehat{\Omega}$*, sowie die Argumentfunktion* $\arg_1 := \operatorname{Im} \circ \ln_1$.

(2.11) Definition:
Mit $\ln : \widehat{\mathbb{C}^*} \to \mathbb{C}$ *bezeichnen wir die eindeutige Lösung des Anfangwertproblems* $\eta'(z) = z^{-1}$ *mit* $\ln(\hat{\gamma}_0) = 0$.
Hiermit definieren wir $\hat{\gamma}^\alpha := \exp(\alpha \ln(\hat{\gamma}))$ *für* $\alpha \in \mathbb{C}$ *und* $\hat{\gamma} \in \widehat{\mathbb{C}^*}$*, sowie die Argumentfunktion* $\arg := \operatorname{Im} \circ \ln$.

(2.12) Bemerkung:

i) $\ln : \widehat{\mathbb{C}^*} \to \mathbb{C}$ *ist eine biholomorphe Abbildung.*

ii) *Für* $\hat{z} \in \widehat{\Omega}$ *folgt:*

$$\begin{aligned} P(\hat{z}) = \exp(\ln_0(\hat{z})) &= |P(\hat{z})| \exp(i \arg_0(\hat{z})), \\ P(\hat{z}) - 1 = \exp(\ln_1(\hat{z})) &= |P(\hat{z}) - 1| \exp(i \arg_1(\hat{z})) \end{aligned}$$

und für $\hat{\gamma} \in \widehat{\mathbb{C}^*}$*:* $\tilde{P}(\hat{\gamma}) = \exp(\ln(\hat{\gamma})) = |\tilde{P}(\hat{\gamma})| \exp(i \arg(\hat{\gamma}))$.

Beweis:
Zu i): Sei $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2 \in \widehat{\mathbb{C}^*}$. Dann existiert eine Kurve $\tilde{\varphi} : [0,1] \to \widehat{\mathbb{C}^*}$ mit $\tilde{\varphi}(0) = \hat{\gamma}_1$ und $\tilde{\varphi}(1) = \hat{\gamma}_2$. Nun lässt sich eine zu $\tilde{P} \circ \tilde{\varphi}$, in $\mathbb{C}^*$ homotope Kurve $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ finden, welche stückweise stetig-differenzierbar ist. Deren Liftung (siehe Definition(9.12) aus dem Anhang) $\hat{\varphi} : [0,1] \to \mathbb{C}^*$, mit $\hat{\varphi}(0) = \hat{\gamma}_1$, ist aufgrund von (9.9), aus dem Anhang, ebenfalls homotop zu $\tilde{\varphi}$, erfüllt also $\hat{\varphi}(1) = \hat{\gamma}_2$.
Aufgrund von (2.5)1. und (2.5)2. folgt dann:

$$\ln(\hat{\gamma}_2) - \ln(\hat{\gamma}_1) = \int_{\hat{\varphi}} \frac{1}{\tilde{P}} = \int_{\varphi} \frac{1}{z} dz. \tag{2.13}$$

Somit folgt aus der Funktionentheorie und mit (9.9), aus dem Anhang:

$$\begin{aligned} \ln(\hat{\gamma}_2) = \ln(\hat{\gamma}_1) &\Rightarrow \varphi \text{ ist eine geschlossene in } \mathbb{C}^* \text{ nullhomotope Kurve} \\ &\Rightarrow \hat{\varphi} \text{ ist eine geschlossene Kurve in } \widehat{\mathbb{C}^*}, \text{ d.h. } \hat{\gamma}_1 = \hat{\gamma}_2. \end{aligned}$$

Also ist die ln-Funktion injektiv.
Sei nun $z_0 \in \mathbb{C}$.
Mit $\hat{\varphi}_1 : [0,1] \to \widehat{\mathbb{C}^*}$ bezeichnen wir die Liftung von

$$\varphi_1 : [0,1] \ni t \to (1-t) + t \exp\left(\mathrm{Re}(z_0)\right) \in \mathbb{C}^*$$

mit $\hat{\varphi}_1(0) = \hat{\gamma}_0$ und mit $\hat{\varphi}_2 : [0,1] \to \widehat{\mathbb{C}^*}$ bezeichnen wir die Liftung von

$$\varphi_2 : [0,1] \ni t \to \exp\left(\mathrm{Re}(z_0) + it\,\mathrm{Im}(z_0)\right) \in \mathbb{C}^*$$

mit $\hat{\varphi}_2(0) = \hat{\varphi}_1(1)$.
Dann folgt entsprechend zu (2.13):

$$\ln\left(\hat{\varphi}_2(1)\right) = \int\limits_{\varphi_1} \frac{1}{\xi} d\xi + \int\limits_{\varphi_2} \frac{1}{\xi} d\xi = z_0.$$

Somit ist die ln-Funktion surjektiv.
Zu ii): Für $\hat{\gamma} \in \widehat{\mathbb{C}^*}_+$, mit $\gamma := \tilde{P}(\hat{\gamma})$ folgt wegen (2.13)

$$\ln(\hat{\gamma}) = \int\limits_{\overline{1,\gamma}} \frac{1}{z} dz = \mathrm{Ln}\,(\gamma) = \mathrm{Ln}\left(\tilde{P}\,(\hat{\gamma})\right).$$

Damit gilt $\exp\left(\ln(\hat{\gamma})\right) = P(\hat{\gamma})$ für $\hat{\gamma} \in \widehat{\mathbb{C}^*}_+$ und über den Identitätssatz (siehe Anhang (9.6)) für alle $\hat{\gamma} \in \widehat{\mathbb{C}^*}$. Hieraus folgt dann $\left|\tilde{P}\,(\hat{\gamma})\right| = \exp\left(\ln(\hat{\gamma})\right)$ und damit $\tilde{P}\,(\hat{\gamma}) = \left|\tilde{P}\,(\hat{\gamma})\right| \exp\left(i \arg\left(\hat{\gamma}\right)\right)$, für $\hat{\gamma} \in \widehat{\mathbb{C}^*}$.
Die anderen Aussagen lassen sich in analoger Weise zeigen. $\square$

Für eine Riemannsche Fläche $\mathcal{R}$ bezeichnen wir die hierauf agierende Gruppe aller biholomorphen Transformationen mit

$$\mathrm{Bi}(\mathcal{R}) := \left\{ f : \mathcal{R} \to \mathcal{R} | f \text{ biholomorph} \right\}.$$

In einem späteren Kapitel dieser Arbeit werden wir Transformation globaler Lösungen der *CHE* einführen. Hierzu benötigen wir spezielle biholomorphe Transformationen auf $\widehat{\Omega}$.

Eine Vorstellung von $\mathrm{Bi}(\widehat{\Omega})$ erhält man, indem man beachtet, dass mit dem *Riemannschen Abbildungssatz* (siehe Satz(9.19), Anhang) eine biholomorphe Abbildung von $\widehat{\Omega}$ auf $K_1(0)$ existiert. Diese induziert einen Gruppenisomorphismus von $\mathrm{Bi}(\widehat{\Omega})$ auf $\mathrm{Bi}(K_1(0))$. Die Gruppe $\mathrm{Bi}(K_1(0))$ ist aber bekannt.
Eine wichtige Untergruppe von $\mathrm{Bi}(\widehat{\Omega})$ ist die der Decktransformationen, die hier mit

$$D(\widehat{\Omega}/\Omega) := \left\{ f : \widehat{\Omega} \to \widehat{\Omega} | f \text{ biholomorph mit } P \circ f = P \right\} \subset \mathrm{Bi}(\widehat{\Omega})$$

bezeichnet wird. Deren Eigenschaften untersuchen wir im folgenden:

(2.14) Satz:

1. *Zu jedem* $(\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2) \in \widehat{\Omega}^2$ *mit* $P(\hat{\omega}_1) = P(\hat{\omega}_2)$ *existiert genau ein* $d \in D(\widehat{\Omega}/\Omega)$ *mit* $d(\hat{\omega}_1) = \hat{\omega}_2$ *(vgl. (9.25)).*

2. *Die Gruppe* $D(\widehat{\Omega}/\Omega)$ *ist isomorph zur Fundamentalgruppe* $\pi_1(\Omega, \omega_+)$ *(vgl. (9.25)). Einen Gruppenisomorphismus liefert die folgende Zuordnung:*
Für $\sigma \in D(\widehat{\Omega}/\Omega)$ *sei* $v_\sigma : [0,1] \to \widehat{\Omega}$ *eine Kurve mit* $v_\sigma(0) := \hat{\omega}_+$ *und* $v_\sigma(1) = \sigma(\hat{\omega}_+)$*. Dann ist*

$$\chi : D(\widehat{\Omega}/\Omega) \ni \sigma \to cl(P \circ v_\sigma) \in \pi_1(\Omega, \omega_+),$$

wobei wir mit $cl(P \circ v_\sigma)$ *die Homotopieklasse von* $P \circ v_\sigma$ *bezeichnen.*

Für den Beweis von 2. verweisen wir auf [3], Seite 32.

(2.15) Bemerkung, Definition:

i) *Mit* $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_\infty$ *aus (2.2) und* χ *aus (2.14) bezeichnen wir*

$$d_0 := \chi^{-1}(cl(\vartheta_0)), \quad d_1 := \chi^{-1}(cl(\vartheta_1)), \quad d_\infty := \chi^{-1}(cl(\vartheta_\infty)).$$

ii) *Die Decktransformationen* d_0 *und* d_1 *erzeugen* $D(\widehat{\Omega}/\Omega)$*.*
Insbesondere gilt $d_0 \circ d_1 = d_\infty$*.*

Beweis:
$cl(\vartheta_0)$ und $cl(\vartheta_1)$ erzeugen die Fundamentalgruppe $\pi_1(\Omega, \omega_+)$. Daraus und (2.14)2. ergibt sich, dass d_0 und d_1 die Gruppe $D(\widehat{\Omega}/\Omega)$ erzeugen.
Da $\vartheta_0 + \vartheta_1$ (siehe (9.22)) homotop zu ϑ_∞ ist, folgt mit (2.14)2. : $d_\infty = d_0 \circ d_1$. □

Um die Transformation (1.4) auch auf globale Lösungen im Sinne von (2.8) anwenden zu können, wollen wir nun

$$T : \Omega \ni z \to 1 - z \in \Omega$$

in geeigneter Weise auf $\widehat{\Omega}$ verallgemeinern.

(2.16) Bemerkung, Definition:
Es existiert genau eine biholomorphe Funktion $\hat{T} : \widehat{\Omega} \to \widehat{\Omega}$ *mit*

$$T \circ P = P \circ \hat{T} \text{ und } \hat{T}(\hat{\omega}_0) = \hat{\omega}_0.$$

Diese erfüllt $\hat{T} \circ \hat{T} = id_{\widehat{\Omega}}$*.*
Beweis: Wir betrachten dazu die holomorphe Funktion

$$T \circ P : \widehat{\Omega} \ni \hat{\omega} \to 1 - P(\hat{\omega}) \in \Omega.$$

Für diese gibt es (siehe Satz(9.13) im Anhang) genau eine stetige Funktion $\hat{T} : \widehat{\Omega} \to \widehat{\Omega}$ mit $P \circ \hat{T} = T \circ P$ und $\hat{T}(\hat{\omega}_0) = \hat{\omega}_0$. $\hat{T}$ ist lokal biholomorph, da $P \circ T$ und P lokal biholomorph sind. Es bleibt also nur noch die Bijektivität von $\hat{T}$ zu zeigen. Wir betrachten dazu die lokal biholomorphe Abbildung $\hat{T} \circ \hat{T} : \widehat{\Omega} \to \widehat{\Omega}$. Diese hat die Eigenschaften

$$P \circ \hat{T} \circ \hat{T}(\hat{\omega}) = 1 - P(\hat{T}(\hat{\omega})) = 1 - (1 - P(\hat{\omega})) = P(\hat{\omega}),\ \hat{\omega} \in \widehat{\Omega}$$

und $\hat{T} \circ \hat{T}(\hat{\omega}_0) = \hat{\omega}_0$. Somit ist $\hat{T} \circ \hat{T} = \mathrm{id}_{\widehat{\Omega}}$ (Satz(9.13), Anhang). □

(2.17) Bemerkung:
Es gilt $\ln_1 = \ln_0 \circ \hat{T} + i\pi$.
Für $\alpha \in \mathbb{C}$ *und* $\hat{z} \in \widehat{\Omega}$ *gilt* $(1 - \hat{z})^\alpha = (\hat{z} - 1)^\alpha \exp(-i\pi\alpha) = \left(\hat{T}(\hat{z})\right)^\alpha$.
Beweis:
Sei $f := \ln_0 \circ \hat{T} \in \mathcal{H}\left(\widehat{\Omega}\right)$.
Wegen der Kettenregel in (2.4)3. gilt $f'(\hat{z}) = \frac{1}{z-1},\ \hat{z} \in \widehat{\Omega}$.
Mit $\ln_0\left(\hat{T}(\hat{\omega}_0)\right) = \ln_0(\hat{\omega}_0) = \mathrm{Ln}\left(\frac{1}{2}\right)$ folgt $f = \ln_1 - i\pi$ aufgrund von (2.9). □

Nun werden wir einige Eigenschaften und Relationen der Transformationen d_0, d_1, d_∞ und $\hat{T}$ auflisten.

(2.18) Bemerkung:

i) $\hat{T} \circ d_0 = d_1 \circ \hat{T}, \quad \hat{T} \circ d_1 = d_0 \circ \hat{T},$

ii) $\hat{T}\left(\widehat{\Omega}_0\right) = \widehat{\Omega}_0, \quad \hat{T}\left(\widehat{\Omega}_+\right) = \widehat{\Omega}_-, \quad \hat{T}(\widehat{\Omega}_\infty^\pm) = \widehat{\Omega}_\infty^\mp, \quad \hat{T}(\hat{\omega}_\pm) = \hat{\omega}_\mp,$

iii) $d_1\left(\widehat{\Omega}_\infty^+\right) = \widehat{\Omega}_\infty^-, \quad d_0^{-1}(\widehat{\Omega}_\infty^+) = \widehat{\Omega}_\infty^-, \quad d_\infty\left(\widehat{\Omega}_\infty^+\right) = \widehat{\Omega}_\infty^+.$

Beweis:
Zu ii): Mit $P \circ \hat{T}(\widehat{\Omega}_0) = T \circ P(\widehat{\Omega}_0) = T(\Omega_0) = \Omega_0$ und $\hat{T}(\hat{\omega}_0) = \hat{\omega}_0$ folgt $\hat{T}(\widehat{\Omega}_0) = \widehat{\Omega}_0$.
Hieraus und aus $P \circ \hat{T}(\hat{\omega}_\pm) = T \circ P(\hat{\omega}_\pm) = P(\hat{\omega}_\mp)$ ergibt sich dann $\hat{T}(\hat{\omega}_\pm) = \hat{\omega}_\mp$.
Aufgrund von $P \circ \hat{T}(\widehat{\Omega}_\pm) = T \circ P(\widehat{\Omega}_\pm) = T(\Omega_\pm) = \Omega_\mp$ und $\hat{T}(\hat{\omega}_\pm) = \hat{\omega}_\mp$ folgt $\hat{T}(\widehat{\Omega}_\pm) = \widehat{\Omega}_\mp$.
Ebenso erhält man $\hat{T}(\widehat{\Omega}_\infty^\pm) = \widehat{\Omega}_\infty^\mp$, aufgrund von $P \circ \hat{T}(\widehat{\Omega}_\infty^\pm) = T \circ P(\widehat{\Omega}_\infty^\pm) = T(\Omega_\infty) = \Omega_\infty$ und $\hat{T}(\hat{\omega}_\pm) = \hat{\omega}_\mp$.
Zu i): Die entsprechende Gleichung für die auf Ω projizierten Funktionen ergibt

$$P \circ \hat{T} \circ d_0 = T \circ P \circ d_0 = T \circ P = P \circ \hat{T} = P \circ d_1 \circ \hat{T}.$$

Wir betrachten die Kurve $\varphi_{\frac{1}{2},\omega_+} : [0,1] \ni t \to \frac{1}{2}(1-t) + t\omega_+ \in \Omega$ und bezeichnen mit $\hat{\varphi}_{\frac{1}{2},\omega_+}$ die Liftung mit $\hat{\varphi}_{\frac{1}{2},\omega_+}(0) = \hat{\omega}_0$. Wegen $\mathrm{Spur}\left(\varphi_{\frac{1}{2},\omega_+}\right) \subset \Omega_0$ ist $\mathrm{Spur}\left(\hat{\varphi}_{\frac{1}{2},\omega_+}\right) \subset \widehat{\Omega}_0$,

und damit gilt $\hat{\varphi}_{\frac{1}{2},\omega_+}(1) = \hat{\omega}_+$.
Mit $\varphi_0 : [0,1] \ni t \to \frac{1}{2}\exp(2\pi i t)$ und $\varphi_1 : [0,1] \to 1 - \frac{1}{2}\exp(2\pi i t)$ sind für $l = 0, 1$ die Kurven φ_l und $\left(\varphi_{\frac{1}{2},\omega_+} + \vartheta_l\right) + \left(-\varphi_{\frac{1}{2},\omega_+}\right)$ (siehe 9.22) homotop zueinander. Somit ist die Liftung

$$\hat{\varphi}_l : [0,1] \to \widehat{\Omega} \text{ von } \varphi_l \ \text{ mit } \hat{\varphi}_l(0) = \hat{\omega}_0$$

homotop zu $\left(\hat{\varphi}_{\frac{1}{2},\omega_+} + \hat{\vartheta}_l\right) - d_l\left(\hat{\varphi}_{\frac{1}{2},\omega_+}\right)$, $l = 0, 1$.
Also gilt

$$\hat{\varphi}_l(1) = d_l\left(\hat{\omega}_0\right). \tag{2.19}$$

Aus $\hat{T}\left(\hat{\varphi}_0(0)\right) = \hat{\omega}_0 = \hat{\varphi}_1(0)$ und

$$P \circ \hat{T} \circ \hat{\varphi}_0(t) = 1 - \frac{1}{2}\exp(2\pi i t) = P \circ \hat{\varphi}_1(t), \ t \in [0,1]$$

folgt $\hat{T} \circ \hat{\varphi}_0 = \hat{\varphi}_1$ und somit $\hat{T} \circ d_0(\hat{\omega}_0) = \hat{T}\left(\hat{\varphi}_0(1)\right) = \hat{\varphi}_1(1) = d_1\left(\hat{\omega}_0\right)$ und damit $\hat{T} \circ d_0 = d_1 \circ \hat{T}$.
Die zweite Gleichung folgt aus der ersten über

$$\hat{T} \circ d_0 \circ \hat{T}^2 = \hat{T} \circ d_0 = d_1 \circ \hat{T} = \hat{T}^2 \circ d_1 \circ \hat{T}.$$

Zu iii): Aus $P \circ d_1\left(\widehat{\Omega}_\infty^+\right) = P \circ d_0^{-1}\left(\widehat{\Omega}_\infty^+\right) = \Omega_\infty$ und der Stetigkeit von d_0, d_1 folgt: $d_1\left(\widehat{\Omega}_\infty^+\right)$ und $d_0^{-1}\left(\widehat{\Omega}_\infty^+\right)$ sind Zusammenhangskomponenten von $P^{-1}(\Omega_\infty)$. Wegen der Definition von d_1 gilt $d_1(\hat{\omega}_+) = \hat{\vartheta}_1(1)$. Da $\hat{\omega}_- \in \text{Spur}\left(\hat{\vartheta}_1\right)$, so gibt es ein $\tau \in]0,1[$ mit $\hat{\vartheta}_1(\tau) = \hat{\omega}_-$. Wegen $\vartheta_1(t) \in \Omega_\infty$ für $t \in [\tau, 1]$ folgt dann, dass $d_1(\hat{\omega}_+)$ und $\hat{\omega}_-$ in derselben Zusammenhangskomponente von $P^{-1}(\Omega_\infty)$ liegen, also in $\widehat{\Omega}_\infty^-$. Außerdem gilt

$$\widehat{\Omega}_\infty^+ = \hat{T}\left(\widehat{\Omega}_\infty^-\right) = \hat{T}\left(d_1\left(\widehat{\Omega}_\infty^+\right)\right) = d_0\left(\hat{T}\left(\widehat{\Omega}_\infty^+\right)\right) = d_0\left(\widehat{\Omega}_\infty^-\right).$$

Damit folgt die Behauptung. □

Aufgrund der in (1.14) aufgezeigten Zusammenhänge der *CHE* mit hypergeometrischen Differentialgleichungen werden wir globale Lösungen hypergeometrischer Differentialgleichungen im Sinne von (2.8) betrachten.
Bei der lokalen Darstellung solcher Lösungen spielt die von den Transformationen T und $S : \Omega \ni z \to \frac{1}{z} \in \Omega$ erzeugte Gruppe

$$\mathrm{Bi}(\Omega) = \left\{z,\ 1-z\ ,\ \frac{1}{z},\ \frac{z-1}{z}, \frac{z}{z-1}, \frac{1}{1-z}\right\}$$

eine wichtige Rolle. Um daher globale Darstellungen solcher Lösungen zu erhalten, benötigen wir daher eine $\hat{T}$ entsprechende Verallgemeinerung von S.

(2.20) Bemerkung, Definition:
Zu $S : \Omega \ni z \to \frac{1}{z} \in \Omega$ *existiert genau eine biholomorphe Funktion* $\hat{S} : \widehat{\Omega} \to \widehat{\Omega}$ *mit*

$$S \circ P = P \circ \hat{S} \text{ und } \hat{S}(d_0(\hat{\omega}_{-1})) = d_0(\hat{\omega}_{-1}).$$

Diese erfüllt $\hat{S} \circ \hat{S} = id_{\widehat{\Omega}}$.

Bei dem Beweis geht man analog zu dem Beweis von (2.16) vor.

Wir werden nun noch einige biholomorphe Transformationen auf $\widehat{\mathbb{C}^*}$ einführen.
Die Abbildung $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ ist eine universelle Überlagerung von $\mathbb{C}^*$, weil sie die Voraussetzungen von (9.16) aus dem Anhang erfüllt. Da wir in (2.12) gezeigt haben, dass die Abbildung $\ln : \widehat{\mathbb{C}^*} \to \mathbb{C}$ biholomorph ist, so induziert diese einen Gruppenisomorphismus von $\mathrm{Bi}(\widehat{\mathbb{C}^*})$ auf $\mathrm{Bi}(\mathbb{C})$, welche bekannt ist.
In (2.12) haben wir zudem $\exp \circ \ln = \tilde{P}$ gezeigt, was bedeutet, dass die $\ln : \widehat{\mathbb{C}^*} \to \mathbb{C}$ eine spurtreue Abbildung ist (siehe hierzu Definition (9.11) aus dem Anhang).

(2.21) Bemerkung, Definition:
Wir bezeichnen für $\varphi \in \mathbb{R}$ *die biholomorphe Abbildung:*

$$\delta_\varphi : \widehat{\mathbb{C}^*} \to \widehat{\mathbb{C}^*} \text{ mit } \delta_\varphi(\hat{\gamma}) := \ln^{-1}(\ln(\hat{\gamma}) + i\varphi), \quad \hat{\gamma} \in \widehat{\mathbb{C}^*}.$$

Die Funktion $\delta_{2\pi}$ *erzeugt dann die Gruppe der Decktransformationen* $D(\widehat{\mathbb{C}^*}/\mathbb{C}^*)$*, welche aus den Transformationen* $\delta_{2\pi k}$ *für* $k \in \mathbb{Z}$ *besteht.*

Beweis:
Aus $z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \exp(z_1) = \exp(z_2) \Leftrightarrow z_1 - z_2 \in 2\pi i\mathbb{Z}$ folgt

$$D(\mathbb{C}/\mathbb{C}^*) = \{\tau_k : \mathbb{C} \to \mathbb{C} | k \in \mathbb{Z}, \tau_k(z) = z + 2\pi i k\},$$

welche von τ_1 erzeugt wird.
$\ln : \widehat{\mathbb{C}^*} \to \mathbb{C}$ erzeugt, aufgrund von (2.12)i), einen Gruppenisomorphismus. Hieraus ergibt sich, dass $\{\delta_{2\pi k} | k \in \mathbb{Z}\}$ von $\delta_{2\pi}$ erzeugt wird. Aus der Spurtreue der ln-Abbildung folgt dann $\delta_{2\pi} \in D(\widehat{\mathbb{C}^*}/\mathbb{C}^*)$ und damit die Behauptung. $\square$

Wir wollen nun noch die Transformation $Q : \mathbb{C}^* \ni z \to \frac{1}{z} \in \mathbb{C}^*$ wie folgt auf $\widehat{\mathbb{C}^*}$ verallgemeinern:

(2.22) Bemerkung, Definition:
Zu $Q : \mathbb{C}^* \ni z \to \frac{1}{z} \in \mathbb{C}^*$ *existiert genau eine biholomorphe Funktion* $\hat{Q} : \widehat{\mathbb{C}^*} \to \widehat{\mathbb{C}^*}$ *mit* $Q \circ \tilde{P} = \tilde{P} \circ \hat{Q}$ *und* $\hat{Q}(\hat{\gamma}_0) = \hat{\gamma}_0$.
Diese erfüllt: $\hat{Q} \circ \hat{Q} = id_{\widehat{\mathbb{C}^*}}$ *und* $\hat{Q}(\hat{\gamma}_+) = \hat{\gamma}_-$.

Der Beweis läuft analog zum Beweis von (2.16).

Um im weiteren Verlauf dieser Arbeit die Darstellungen der Formeln zu vereinfachen, wird, falls dies nicht zu Missverständnissen führt, folgende Konvention eingeführt: Variablen aus $\widehat{\Omega}$ und $\widehat{\mathbb{C}^*}$ werden immer mit dem Symbol " ^ " Dach bezeichnet, zum Beispiel $\hat{z} \in \widehat{\Omega}$ oder $\hat{\gamma} \in \widehat{\mathbb{C}^*}$.
Für deren Projektionen wird dann entsprechend das gleiche Symbol ohne " ^ " gewählt, also: Für $\hat{z} \in \widehat{\Omega}$ (bzw. $\hat{\gamma} \in \widehat{\mathbb{C}^*}$) wird $z := P(\hat{z}) \in \Omega$ (bzw. $\gamma = \tilde{P}(\hat{\gamma}) \in \mathbb{C}^*$) notiert.

Nun führen wir für die *CHE* (1.5) und deren Lösungsmenge eine Notation ein, bei der die Parameter $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1, \gamma \in \mathbb{C}$ aus (1.5) mit einbezogen werden.

In dieser Arbeit werden wir ausschließlich den Fall $\gamma \in \mathbb{C}^*$ betrachten, da ∞ genau dann eine irreguläre Singularität der *CHE* (1.5) von Rang 1 ist (siehe [12]). Da die globalen Lösungen der *CHE* (1.5) im allgemeinen ein Umlaufverhalten um den Nullpunkt bezüglich $\gamma \in \mathbb{C}^*$ haben, ist es sinnvoll die Lösungen in Abhängigkeit von $\hat{\gamma} \in \widehat{\mathbb{C}^*}$ mit $\tilde{P}(\hat{\gamma}) = \gamma$ zu betrachten.
Somit führen wir für

$$p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda := \mathbb{C}^4 \times \widehat{\mathbb{C}^*} \tag{2.23}$$

den parameterabhängigen Differentialoperator $L(p) : \mathcal{H}(\widehat{\Omega}) \to \mathcal{H}(\widehat{\Omega})$ durch

$$\begin{aligned}(L(p)\eta)(\hat{z}) &:= z(z-1)\eta''(\hat{z}) + [(1-\alpha_0)(z-1) + (1-\alpha_1)z - \gamma z(z-1)]\eta'(\hat{z}) \\ &+\Big[\frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1) + (\beta_0 - \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_0))(z-1) + (\beta_1 - \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_1))z\Big]\eta(\hat{z}),\end{aligned} \tag{2.24}$$

ein. Dann gilt:
$\eta : \widehat{\Omega} \to \mathbb{C}$ ist genau dann globale Lösung der *CHE* (1.5) zum Parametersatz p, wenn $\eta \in \mathrm{Kern}\,(L(p))$ ist.

3 Gewinnung von Integralrelationen

Erfüllen zwei globale Lösungen $y \in \operatorname{Kern}(L(p))$ und $\tilde{y} \in \operatorname{Kern}(L(\tilde{p}))$, mit $p, \tilde{p} \in \Lambda$, eine Integralgleichung der Form

$$y(\hat{z}) = \int_c K(\hat{z}, \cdot)\tilde{y}, \quad \hat{z} \in G, \tag{3.1}$$

wobei $G, H \subset \widehat{\Omega}$ Gebiete sind, $K : G \times H \to \mathbb{C}$ eine stetige partiell-holomorphe Funktion ist, und c eine in H verlaufende Kurve mit $P \circ c$ stückweise stetig-differenzierbar ist, so bezeichnet man die Gleichung (3.1) als eine *Integralrelation* von Lösungen konfluenter Heunscher Differentialgleichungen.
Die Funktion K bezeichnet man als *Kern* der Integralrelation (3.1).
Mit Hilfe von Satz (9.30) aus dem Anhang wollen wir solche Integralrelationen gewinnen. Um diesen Satz auf unsere Situation anwenden zu können, benötigen wir Parametersätze $p, \tilde{p} \in \Lambda$ sowie einen Kern $K : G \times H \to \mathbb{C}$, $G, H \subset \widehat{\Omega}$ Gebiete, so daß die partielle Differentialgleichung

$$\left(L(p)\, K\left(\cdot, \hat{t}\right)\right)(\hat{z}) = \left(L(\tilde{p})\, K(\hat{z}, \cdot)\right)\left(\hat{t}\right), \quad \left(\hat{z}, \hat{t}\right) \in G \times H \tag{3.2}$$

erfüllt ist.
Solche Kerne wollen wir auf zwei unterschiedliche Methoden gewinnen:

3.1 Kerne mittels Separation

Die erste Methode basiert auf der simultanen Separierbarkeit der verallgemeinerten Schrödingergleichung (siehe (1.14)). Hierbei setzen wir $\tilde{p} = p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ voraus und schließen an Abschnitt 1.2 an.

(3.3) Bemerkung, Definition:
Es seien $\theta := (\theta_1, \theta_2) : \widehat{\Omega}^2 \to \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ und $\eta := (\eta_1, \eta_2) : \widehat{\Omega}^2 \to \mathbb{C}^* \times \Omega$ die stetigen und partiell holomorphen Funktionen

$$\begin{aligned} \theta\left(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2\right) &:= \left(\xi_1\xi_2,\ (1-\xi_1)(\xi_2-1)\right), \quad \left(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2\right) \in \widehat{\Omega}^2, \\ \eta\left(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2\right) &:= \left(\xi_1+\xi_2-1,\ \frac{\xi_1\xi_2}{\xi_1+\xi_2-1}\right), \quad \left(\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2\right) \in \widehat{\Omega}^2. \end{aligned}$$

Hierfür gilt (vgl. Satz (9.13) aus dem Anhang) :

i) Zu $\left(\hat{\xi}_1^0, \hat{\xi}_2^0\right) \in \widehat{\Omega}^2$ und $(\hat{z}_1, \hat{z}_2) \in \widehat{\mathbb{C}^*}^2$ mit $(z_1, z_2) = \theta\left(\hat{\xi}_1^0, \hat{\xi}_2^0\right)$ existiert genau eine Liftung $\hat{\theta} := \left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right) : \widehat{\Omega}^2 \to \widehat{\mathbb{C}^*} \times \widehat{\Omega}$ von θ mit $\hat{\theta}\left(\hat{\xi}_1^0, \hat{\xi}_2^0\right) = (\hat{z}_1, \hat{z}_2)$.

ii) Zu $\left(\hat{\xi}_1^0, \hat{\xi}_2^0\right) \in \widehat{\Omega}^2$ und $(\hat{z}_1, \hat{z}_2) \in \widehat{\mathbb{C}^*} \times \widehat{\Omega}$ mit $(z_1, z_2) = \eta\left(\hat{\xi}_1^0, \hat{\xi}_2^0\right)$ existiert genau eine Liftung $\hat{\eta} := (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) : \widehat{\Omega}^2 \to \widehat{\mathbb{C}^*} \times \widehat{\Omega}$ von η mit $\hat{\eta}\left(\hat{\xi}_1^0, \hat{\xi}_2^0\right) = (\hat{z}_1, \hat{z}_2)$.

Diese sind partiell holomorph (vgl. Satz (9.14) aus dem Anhang).

(3.4) Bezeichnung: *Wir bezeichnen für* $(\alpha, \beta, \gamma, \hat{z}) \in \mathbb{C}^3 \times \widehat{\Omega}$*:*

$$\varpi(\alpha, \beta, \gamma, \hat{z}) := \hat{z}^{\alpha}(1-\hat{z})^{\beta} \exp(\gamma z).$$

(3.5) Satz:
Seien $\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2, \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ *wie in (3.3) gewählt und* $p = \tilde{p} = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$.

1. *Ist* $\nu \in \mathbb{C}$, $v_1 \in \mathcal{H}\left(\widehat{\mathbb{C}^*}\right)$ *globale Lösung von (1.15) und* $v_2 \in \mathcal{H}\left(\widehat{\Omega}\right)$ *globale Lösung von (1.16), so erfüllt* $K : \widehat{\Omega}^2 \to \mathbb{C}$ *mit*

$$K(\hat{z}, \hat{t}) := v_1\left(\hat{\eta}_1(\hat{z}, \hat{t})\right) v_2\left(\hat{\eta}_2(\hat{z}, \hat{t})\right), \quad (\hat{z}, \hat{t}) \in \widehat{\Omega}^2,$$

   die partielle Differentialgleichung (3.2).

2. *Ist* $\lambda \in \mathbb{C}$, $u_1 \in \mathcal{H}\left(\widehat{\mathbb{C}^*}\right)$ *globale Lösung von (1.17) und* $u_2 \in \mathcal{H}\left(\widehat{\mathbb{C}^*}\right)$ *globale Lösung von (1.18), so erfüllt* $K : \widehat{\Omega}^2 \to \mathbb{C}$ *mit*

$$K(\hat{z}, \hat{t}) := u_1\left(\hat{\theta}_1(\hat{z}, \hat{t})\right) u_2\left(\hat{\theta}_2(\hat{z}, \hat{t})\right), \quad (\hat{z}, \hat{t}) \in \widehat{\Omega}^2,$$

   die partielle Differentialgleichung (3.2).

Sei außerdem $G \subset \widehat{\Omega}$ *ein Gebiet,* K *wie in 1. oder 2. gewählt,* $y_1 \in Kern(L(p))$ *und* c *eine Kurve in* $\widehat{\Omega}$, *mit* $P \circ c$ *stückweise stetig differenzierbar und*

$$\varpi(1-\alpha_0, 1-\alpha_1, -\gamma, \cdot)\left(y_1 \partial_2 K(\hat{z}, \cdot) - K(\hat{z}, \cdot) y_1'\right)\Big|_c = 0, \quad \forall \hat{z} \in G.$$

Im Fall, dass c *ein uneigentlicher Integrationsweg ist, gelte zusätzlich:*
Das uneigentliche Integral

$$\int_c K(\hat{z}, \cdot)\varpi(-\alpha_0, -\alpha_1, -\gamma, \cdot) y_1$$

konvergiere bzgl. $\hat{z} \in G$ *lokal gleichmässig.*
Dann existiert eine Lösung $y_2 : \widehat{\Omega} \to \mathbb{C}$ *von* $L(p) y_2 = 0$ *mit*

$$y_2(\hat{z}) = \int_c K(\hat{z}, \cdot)\varpi(-\alpha_0, -\alpha_1, -\gamma, \cdot) y_1, \quad \hat{z} \in G.$$

Beweis: Wir können über die Kettenregel (2.4)*iii)* und die in (1.14) durchgeführten Separationen sofort schliessen, daß die im Satz angegebenen Funktionen K die partielle Differentialgleichung (3.2) lösen. Die übrigen Aussagen folgen sofort mit Satz (9.30) aus dem Anhang, wobei man natürlich zu beachten hat, dass sich jede lokale Lösung auf $\widehat{\Omega}$ analytisch fortsetzen lässt. $\square$

3.2 Kerne der Form $k(z \cdot t)$ und $k(z+t)$

Die zweite Methode besteht darin, mit Hilfe von Ansätzen der Form

$$K\left(\hat{z},\hat{t}\right) := k(zt) \quad \text{und} \quad K\left(\hat{z},\hat{t}\right) := k(z+t)$$

Parameter $p, \tilde{p} \in \Lambda$ und Funktionen k zu suchen, so daß die Gleichung (3.2) erfüllt wird.

(3.6) Lemma: *Es seien $D \subset \mathbb{C}$, $G \subset \widehat{\Omega}^2$ Gebiete mit $z \cdot t \in D$ für $\left(\hat{z},\hat{t}\right) \in G$, $k : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $K\left(\hat{z},\hat{t}\right) := k(zt)$, $\left(\hat{z},\hat{t}\right) \in G$ und*

$$p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda, \quad \tilde{p} = \left(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \hat{\tilde{\gamma}}\right) \in \Lambda.$$

Dann erfüllt K die partielle Differentialgleichung (3.2) genau dann, wenn k die folgenden drei Differentialgleichungen löst:

$$xk'' + [(1-\alpha_0) - x\tilde{\gamma}]k' + [\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 - \frac{1}{2}\tilde{\gamma}(2 - \tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_1)]k = 0, \tag{3.7}$$

$$xk'' + [(1-\tilde{\alpha}_0) - x\gamma]k' + [\beta_0 + \beta_1 - \frac{1}{2}\gamma(2 - \alpha_0 - \alpha_1)]k = 0, \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} &x[(-\alpha_0 - \alpha_1 + \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1) + (\gamma - \tilde{\gamma})]k' + \Big[\frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1) \\ &\quad -\frac{1}{2}(1-\tilde{\alpha}_0)(1-\tilde{\alpha}_1) + (\tilde{\beta}_0 - \frac{1}{2}\tilde{\gamma}(1-\tilde{\alpha}_0)) - (\beta_0 - \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_0))\Big]k = 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

(3.10) Lemma: *Es seien $D \subset \mathbb{C}$, $G \subset \widehat{\Omega}^2$ Gebiete mit $z + t \in D$ für $\left(\hat{z},\hat{t}\right) \in G$, $k : \mathbb{C} \supset D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, $K\left(\hat{z},\hat{t}\right) := k(z+t)$, $\left(\hat{z},\hat{t}\right) \in G$ und*

$$p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda, \quad \tilde{p} = \left(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \hat{\tilde{\gamma}}\right) \in \Lambda.$$

Dann erfüllt K die partielle Differentialgleichung (3.2) genau dann, wenn k die folgenden drei Differentialgleichungen löst:

$$\begin{aligned} &x(x+1)k'' + [(1-\alpha_1)(x+1) + (1-\alpha_0)x + (1-\tilde{\alpha}_0) - \gamma x(x+1)]\, k' \\ &\quad + \Big[(\beta_0 - \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_0))x + (\beta_1 - \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_1))(x+1) + \frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1) \\ &\quad -\frac{1}{2}(1-\tilde{\alpha}_0)(1-\tilde{\alpha}_1) + \tilde{\beta}_0 - \frac{1}{2}\tilde{\gamma}(1-\tilde{\alpha}_0)\Big]k = 0, \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} &2xk'' + [(4 - \alpha_0 - \alpha_1 - \tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_1 - \gamma + \tilde{\gamma}) - 2\gamma x]\, k' \\ &\quad + \Big[\beta_0 + \tilde{\beta}_0 + \beta_1 + \tilde{\beta}_1 - \frac{1}{2}\gamma(2 - \alpha_1 - \alpha_0) - \frac{1}{2}\tilde{\gamma}(2 - \tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0)\Big]k = 0, \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$(\tilde{\gamma} - \gamma)k' = 0. \tag{3.13}$$

Beweis von (3.6):
Seien $p=(\alpha_0,\beta_0,\alpha_1,\beta_1,\hat{\gamma})\in\Lambda$ und $\tilde{p}=\left(\tilde{\alpha}_0,\tilde{\beta}_0,\tilde{\alpha}_1,\tilde{\beta}_1,\hat{\tilde{\gamma}}\right)\in\Lambda$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\left(L\,(p)\,K\left(\cdot,\hat{t}\right)\right)(\hat{z})-\left(L(\tilde{p})K\left(\hat{z},\cdot\right)\right)\left(\hat{t}\right)=z(z-1)k''(z\cdot t)t^2\\
&+[(1-\alpha_0)(z-1)+(1-\alpha_1)z-\gamma z(z-1)]k'(z\cdot t)t\\
&+\left[\frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)+\left(\beta_0-\frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_0)\right)(z-1)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\left(\beta_1-\frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_1)\right)z\right]k(z\cdot t)-t(t-1)k''(z\cdot t)z^2\\
&-[(1-\tilde{\alpha}_0)(t-1)+(1-\tilde{\alpha}_1)t-\tilde{\gamma}t(t-1)]k'(z\cdot t)z\\
&-\left[\frac{1}{2}(1-\tilde{\alpha}_0)(1-\tilde{\alpha}_1)+\left(\tilde{\beta}_0-\frac{1}{2}\tilde{\gamma}(1-\tilde{\alpha}_0)\right)(t-1)\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\left(\tilde{\beta}_1-\frac{1}{2}\tilde{\gamma}(1-\tilde{\alpha}_1)\right)t\right]k(z\cdot t)\\
&=(zt)(z-t)k''(z\cdot t)\\
&+[(-\alpha_0-\alpha_1+\tilde{\alpha}_0+\tilde{\alpha}_1)(zt)-(1-\alpha_0)t+(1-\tilde{\alpha}_0)z-z^2t\gamma+t^2z\tilde{\gamma}\\
&+(zt)(\gamma-\tilde{\gamma})]k'(z\cdot t)+\left[\frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)-\frac{1}{2}(1-\tilde{\alpha}_0)(1-\tilde{\alpha}_1)\right.\\
&+\left(\beta_0+\beta_1-\frac{1}{2}\gamma(2-\alpha_0-\alpha_1)\right)z-\left(\tilde{\beta}_0+\tilde{\beta}_1-\frac{1}{2}\tilde{\gamma}(2-\tilde{\alpha}_0-\tilde{\alpha}_1)\right)t\\
&\left.+\left(\tilde{\beta}_0-\frac{1}{2}\tilde{\gamma}(1-\tilde{\alpha}_0)\right)-\left(\beta_0-\frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_0)\right)\right]k(zt)\\
=&-tF_1(zt)+zF_2(zt)+F_3(zt),
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
F_1(x)&:=xk''(x)-\tilde{\gamma}xk'(x)+(1-\alpha_0)k'(x)\\
&\qquad\qquad+\left(\tilde{\beta}_0+\tilde{\beta}_1-\frac{1}{2}\tilde{\gamma}(2-\tilde{\alpha}_0-\tilde{\alpha}_1)\right)k(x),\\
F_2(x)&:=xk''(x)-\gamma xk'(x)+(1-\tilde{\alpha}_0)k'(x)+\\
&\qquad\qquad\left(\beta_0+\beta_1-\frac{1}{2}\gamma(2-\alpha_0-\alpha_1)\right)k(x),\\
F_3(x)&:=(-\alpha_0-\alpha_1+\tilde{\alpha}_0+\tilde{\alpha}_1+\gamma+\tilde{\gamma})\,xk'(x)+\left(\frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\right.\\
&\left.-\frac{1}{2}(1-\tilde{\alpha}_0)(1-\tilde{\alpha}_1)+\left(\tilde{\beta}_0-\frac{1}{2}\tilde{\gamma}(1-\tilde{\alpha}_0)\right)-\left(\beta_0-\frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_0)\right)\right)k(x),
\end{aligned}$$

für $x \in D$.
Sei $\left(\hat{z}_0, \hat{t}_0\right) \in G$ beliebig und $x_0 := z_0 t_0$. Dann existiert eine Umgebung $U \times V$ von $\left(\hat{z}_0, \hat{t}_0\right)$ in G, so dass für jedes $\hat{t} \in V$ ein $\hat{z}(\hat{t}) \in U$ existiert mit $tz\left(\hat{t}\right) = x_0$. Für $\hat{t} \in V$ folgt dann aus

$$0 = \left(L\left(p\right)K\left(\cdot, \hat{t}\right)\right)(\hat{z}) - \left(L(\tilde{p})K\left(\hat{z}, \right)\right)\left(\hat{t}\right) = t[-F_1(x_0)] + z\left(\hat{t}\right)[F_2(x_0)] + [F_3(x_0)]$$

die Gleichung $t^2[-F_1(x_0)] + t[F_3(x_0)] + [x_0F_2(x_0)] = 0$ und damit weiter $F_1(x_0) = F_2(x_0) = F_3(x_0) = 0$. Da die Menge $\{zt | \left(\hat{t}, \hat{z}\right) \in G\}$ einen Häufungspunkt in D hat, so folgt $F_1 = F_2 = F_3 = 0$ nach dem Identitätssatz.
Damit ist eine Implikation bewiesen. Die Rückrichtung ist trivial. □

Beweis von (3.10):
Seien $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ und $\tilde{p} = \left(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \hat{\tilde{\gamma}}\right) \in \Lambda$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\left(L\left(p\right)K\left(\cdot, \hat{t}\right)\right)(\hat{z}) - \left(L(\tilde{p})K\left(\hat{z}, \cdot\right)\right)\left(\hat{t}\right) \\
=&(z-t)\left(z+t-1\right)k''(z+t-1) + \Big[(1-\alpha_0)(z-1) - (1-\tilde{\alpha}_0)(t-1) \\
&+ (1-\alpha_1)z - (1-\tilde{\alpha}_1)t - \gamma z(z-1) + \tilde{\gamma}t(t-1)\Big]k'(z+t-1) \\
&+ \Bigg[\frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1) - \frac{1}{2}(1-\tilde{\alpha}_0)(1-\tilde{\alpha}_1) + \left(\beta_0 - \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_0)\right)(z-1) \\
&\qquad - \left(\tilde{\beta}_0 - \frac{1}{2}\tilde{\gamma}(1-\tilde{\alpha}_0)\right)(t-1) + \left(\beta_1 - \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_1)\right)z \\
&\qquad - \left(\tilde{\beta}_1 - \frac{1}{2}\tilde{\gamma}(1-\tilde{\alpha}_1)\right)t\Bigg]k(z+t-1) \\
=&F_1(z+t-1) - tF_2(z+t-1) + t^2F_3(z+t-1)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
F_1(x) :=& x(x+1)k''(x) + \Big[(1-\alpha_0)x + (1-\alpha_1)(x+1) \\
&+ (1-\tilde{\alpha}_0) - \gamma x(x+1)\Big]k'(x) + \Bigg[\left(\beta_0 - \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_0)\right)x \\
&+ \left(\beta_1 - \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_1)\right)(x+1) + c + \tilde{\beta}_0 - \frac{1}{2}\tilde{\gamma}(1-\tilde{\alpha}_0)\Bigg]k(x), \\
F_2(x) :=& 2xk''(x) + \left[4 - \alpha_0 - \tilde{\alpha}_0 - \alpha_1 - \tilde{\alpha}_1 - \gamma + \tilde{\gamma} - 2\gamma x\right]k'(x) \\
&+ \left(\beta_0 + \tilde{\beta}_0 + \beta_1 + \tilde{\beta}_1 - \frac{1}{2}\tilde{\gamma}(2-\tilde{\alpha}_0-\tilde{\alpha}_1) - \frac{1}{2}\gamma(2-\alpha_0-\alpha_1)\right), \\
F_3(x) :=& \left(\tilde{\gamma} - \gamma\right)k'(x).
\end{aligned}$$

für $x \in D$. Analog zum Beweis von (3.6) folgt die Behauptung. $\square$

Setzen wir in (3.6) und (3.10) $\tilde{p} = p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ voraus, so erfüllt k in beiden Fällen eine konfluente hypergeometrische Differentialgleichung. Die hierüber gewonnenen Kerne lassen sich ebenfalls aus Satz (3.5) erhalten.

(3.14) Bemerkung:

Seien die Voraussetzungen von (3.6) erfüllt und sei $\tilde{p} = p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$. Dann gilt:

K löst die partielle Differentialgleichung (3.2) genau dann, wenn k Lösung der folgenden konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichung ist:

$$xk'' + [(1 - \alpha_0) - x\gamma]k' + [\beta_0 + \beta_1 - \frac{1}{2}\gamma(2 - \alpha_0 - \alpha_1)]k = 0.$$

Seien die Voraussetzungen von (3.10) erfüllt und sei $\tilde{p} = p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$. Dann gilt:

K löst die partielle Differentialgleichung (3.2) genau dann, wenn k Lösung der folgenden konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichung ist:

$$xk'' + [(2 - \alpha_0 - \alpha_1) - x\gamma]k' + [\beta_0 + \beta_1 - \frac{1}{2}\gamma(2 - \alpha_0 - \alpha_1)]k = 0.$$

Die Behauptungen folgen sofort aus (3.6) und (3.10).

In der folgenden Bemerkung erhalten wir mit Hilfe der exp-Funktion einen Kern, mit dem wir verallgemeinerte Laplacetransformation für die Lösungen der *CHE* definieren werden.

(3.15) Bemerkung, Definition:

Seien $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ und $\tilde{p} = \left(\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \hat{\tilde{\gamma}}\right) \in \Lambda$.

Der Kern $K : \widehat{\Omega}^2 \ni \left(\hat{z}, \hat{t}\right) \to \exp(\gamma z t) \in \mathbb{C}$ erfüllt genau dann die partielle Differentialgleichung (3.2), wenn:

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_0 &= \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} + \frac{\beta_0 + \beta_1}{\gamma}, \quad \tilde{\alpha}_1 = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} - \frac{\beta_0 + \beta_1}{\gamma}, \quad \tilde{\gamma} = \gamma, \\
\tilde{\beta}_0 &= \frac{1}{4}\gamma\left(\alpha_0 - \alpha_1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\left(\alpha_0 - \alpha_1\right)^2}{4} - \frac{\left(\beta_0 + \beta_1\right)^2}{\gamma^2}\right) + \frac{\beta_0 - \beta_1}{2}, \\
\tilde{\beta}_1 &= \frac{1}{4}\gamma\left(\alpha_0 - \alpha_1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\left(\alpha_0 - \alpha_1\right)^2}{4} - \frac{\left(\beta_0 + \beta_1\right)^2}{\gamma^2}\right) - \frac{\beta_0 - \beta_1}{2}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Beweis:

Setzen wir $k(x) := \exp(\gamma x)$, $x \in \mathbb{C}$ in die Differentialgleichungen (3.7),(3.8) und (3.9) ein und multiplizieren die drei Gleichungen mit $\exp(-\gamma x)$ so folgt:

(3.7) ist genau dann erfüllt, wenn für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$(\gamma^2 - \tilde{\gamma}\gamma)x + (1 - \alpha_0)\gamma + \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 - \frac{1}{2}\tilde{\gamma}(2 - \tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_1) = 0.$$

(3.7) ist damit äquivalent zu

$$\tilde{\gamma} = \gamma \text{ und } \alpha_0 = \frac{\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1}{\gamma} + \frac{(\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1)}{2}. \tag{3.17}$$

Genauso folgt: (3.8) ist äquivalent zu

$$\gamma = \tilde{\gamma} \text{ und } \tilde{\alpha}_0 = \frac{\beta_0 + \beta_1}{\gamma} + \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}. \tag{3.18}$$

(3.9) ist genau dann erfüllt, wenn für alle $x \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\begin{aligned}(-\alpha_0 - \alpha_1 + \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1)\gamma x + \Bigg(& \frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1) \\ & - \frac{1}{2}(1-\tilde{\alpha}_0)(1-\tilde{\alpha}_1) + \tilde{\beta}_0 - \frac{1}{2}\tilde{\gamma}(1-\tilde{\alpha}_0) - \left(\beta_0 - \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_0)\right)\Bigg) = 0.\end{aligned}$$

(3.9) ist damit äquivalent zu

$$\begin{aligned}&\alpha_0 + \alpha_1 = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 \text{ und} \\ &\tilde{\beta}_0 = \frac{1}{2}(1-\tilde{\alpha}_0)(1-\tilde{\alpha}_1) - \frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1) + \beta_0 + \frac{1}{2}\gamma(1-\tilde{\alpha}_0 - 1 + \alpha_0) \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - (\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1) + \tilde{\alpha}_0\tilde{\alpha}_1 - (1 - (\alpha_0 + \alpha_1) + \alpha_0\alpha_1)\right] + \beta_0 + \frac{1}{2}\gamma(\alpha_0 - \tilde{\alpha}_0)\end{aligned} \tag{3.19}$$

und damit zu

$$\tilde{\beta}_0 = \frac{1}{2}\left(\tilde{\alpha}_0\tilde{\alpha}_1 - \alpha_0\alpha_1\right) + \beta_0 + \frac{1}{2}\gamma(\alpha_0 - \tilde{\alpha}_0) \text{ und } \alpha_0 + \alpha_1 = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1. \tag{3.20}$$

Mit jeweils den zweiten Gleichungen aus (3.17) (3.18) und (3.20) folgt:

$$\begin{aligned}&\alpha_0 + \alpha_1 = \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1 \text{ und } \tilde{\alpha}_0 = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} + \frac{\beta_0 + \beta_1}{\gamma} \text{ und} \\ &\alpha_0 = \frac{\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1}{\gamma} + \frac{(\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1)}{2}\end{aligned}$$

gilt genau dann, wenn gilt:

$$\tilde{\alpha}_{0/1} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} \pm \frac{\beta_0 + \beta_1}{\gamma} \text{ und } \tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 = \frac{1}{2}\gamma\left(\alpha_0 - \alpha_1\right). \tag{3.21}$$

Mit (3.21) und der ersten Gleichung aus (3.20) gilt:

$$
\begin{aligned}
& (3.21) \text{ und } \tilde{\beta}_0 = \frac{1}{2}\left(\tilde{\alpha}_0\tilde{\alpha}_1 - \alpha_0\alpha_1\right) + \beta_0 + \frac{1}{2}\gamma(\alpha_0 - \tilde{\alpha}_0) \\
\Leftrightarrow \quad & (3.21) \text{ und } \tilde{\beta}_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{(\alpha_0+\alpha_1)^2}{4} - \frac{(\beta_0+\beta_1)^2}{\gamma^2} - \frac{4\alpha_0\alpha_1}{4}\right) + \beta_0 \\
& + \frac{1}{2}\gamma\left(\alpha_0 - \frac{\alpha_0+\alpha_1}{2} - \frac{\beta_0+\beta_1}{\gamma}\right) \\
& = \frac{1}{4}\gamma\left(\alpha_0 - \alpha_1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{(\alpha_0-\alpha_1)^2}{4} - \frac{(\beta_0+\beta_1)^2}{\gamma^2}\right) + \frac{\beta_0-\beta_1}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & \tilde{\alpha}_{0/1} = \frac{\alpha_0+\alpha_1}{2} \pm \frac{\beta_0+\beta_1}{\gamma} \text{ und} \\
& \tilde{\beta}_{0/1} = \frac{1}{4}\gamma\left(\alpha_0-\alpha_1\right) \pm \frac{1}{2}\left(\frac{(\alpha_0-\alpha_1)^2}{4} - \frac{(\beta_0+\beta_1)^2}{\gamma^2}\right) \pm \frac{\beta_0-\beta_1}{2}.
\end{aligned}
$$

□

(3.22) Satz: *Sei $G \subset \widehat{\Omega}$ Gebiet, $p, \tilde{p} \in \Lambda$ wie in (3.16), $y_1 \in Kern\left(L\left(\tilde{p}\right)\right)$, ϖ wie in (3.4) und c eine Kurve in $\widehat{\Omega}$, deren Projektion stückweise stetig-differenzierbar ist, mit*

$$\varpi\left(1-\tilde{\alpha}_0, 1-\tilde{\alpha}_1, -\gamma, \cdot\right)\exp\left(\gamma z P\left(\cdot\right)\right)\left(y_1 \cdot z \cdot \gamma - y_1'\right)\Big|_c = 0, \quad \hat{z} \in G.$$

Im Fall, dass c ein uneigentlicher Integrationsweg ist, gelte zusätzlich:
Das uneigentliche Integral

$$\int_c \exp\left(\gamma z P(\cdot)\right)\varpi(-\tilde{\alpha}_0, -\tilde{\alpha}_1, -\gamma, \cdot)y_1$$

konvergiere bzgl. $\hat{z} \in G$ lokal gleichmäßig.
Dann existiert genau ein $y_2 \in Kern\left(L(p)\right)$ mit

$$y_2(\hat{z}) = \int_c \exp\left(\gamma z P(\cdot)\right)\varpi(-\tilde{\alpha}_0, -\tilde{\alpha}_1, -\gamma, \cdot)y_1, \quad \hat{z} \in G.$$

Dies folgt sofort aus (3.15) und Satz (9.30) aus dem Anhang, wieder mit analytischer Fortsetzung (siehe Beweis von (3.5)).
Mit Hilfe von (3.6) und (3.10) lassen sich noch andere Kerne gewinnen als die in (3.14) und (3.15) angegebenen. Zum Beispiel erhält man mit Hilfe von (3.10) Kerne der Form $K(z,t) := (z+t-1)^\mu = (t - T(z))^\mu$. Hiermit lassen sich im Zusammenhang mit (1.4) Kerne der Form $K(z,t) := (t-z)^\mu$ finden. Diese, sowie der in (3.15) angegebene Kern, lassen sich auch in [7] nachlesen. Dort werden zudem weitere Integralrelation angegeben, die sich unter Berücksichtigung von (1.4) aus den hier besprochenen gewinnen lassen.
Weitere Arbeiten, die sich in diesem Zusammenhang mit Integralrelationen beschäftigen, sind [20], [12], [7],[6],[8] und [9].

4 Transformationen globaler Lösungen der konfluenten Heunschen Differentialgleichung

In diesem Abschnitt wird eine Gruppe von Transformationen definiert, die auf der Funktionsmenge $\mathcal{F}\left(\Lambda \times \widehat{\Omega}\right) := \left\{f | f : \Lambda \times \widehat{\Omega} \to \mathbb{C}\right\}$ (mit Λ aus (2.23)) agiert und deren Elemente die Mannigfaltigkeit, welche von den parameterabhängigen Lösungen der *CHE* erzeugt wird, auf sich abbildet.
Solche Transformationen erhalten wir zum einen mit Hilfe der Decktransformationen aus $D\left(\widehat{\Omega}/\Omega\right)$ und zum anderen mit dem in (1.3) und (1.4) errechneten Transformationsverhalten der *CHE*.

(4.1) Bemerkung, Definition:
Für $d \in D\left(\widehat{\Omega}/\Omega\right)$ *sei* $\Upsilon(d) : \mathcal{F}\left(\Lambda \times \widehat{\Omega}\right) \to \mathcal{F}\left(\Lambda \times \widehat{\Omega}\right)$ *die durch*

$$(\Upsilon(d)y)\,(p, \hat{z}) := y\left(p, d^{-1}\left(\hat{z}\right)\right), \quad y \in \mathcal{F}\left(\Lambda \times \widehat{\Omega}\right),\ (p, \hat{z}) \in \Lambda \times \widehat{\Omega}$$

definierte Transformation. Man erkennt sofort:
$\Upsilon : D\left(\widehat{\Omega}/\Omega\right) \to \Upsilon\left(D\left(\widehat{\Omega}/\Omega\right)\right)$ *ist ein Gruppenisomorphismus.*
Speziell bezeichnen wir

$$\phi_0 := \Upsilon\left(d_0^{-1}\right), \quad \phi_1 := \Upsilon\left(d_1^{-1}\right),\ \text{und}\ \phi_\infty := \Upsilon\left(d_\infty^{-1}\right) = \phi_1 \circ \phi_0.$$

Im Zusammenhang mit (1.3),(1.4) führen wir nun folgende Parametertransformationen ein:

(4.2) Definition:
Wir definieren $\tau_0, \tau_1, \tau_{01}, \tau_\infty : \Lambda \to \Lambda$ *mit* $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ *durch:*

$$\begin{aligned}
\tau_0(p) &:= (-\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}),\\
\tau_1(p) &:= (\alpha_0, \beta_0, -\alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}),\\
\tau_{01}(p) &:= (\alpha_1, -\beta_1, \alpha_0, -\beta_0, \delta_{-\pi}(\hat{\gamma})),\\
\tau_\infty(p) &:= (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \delta_\pi(\hat{\gamma})),
\end{aligned}$$

wobei δ_π *und* $\delta_{-\pi}$ *in (2.21) definiert wurden.*

Hiermit definieren wir:

(4.3) Definition:
Wir definieren $t_0, t_1, t_{01}, t_\infty : \mathcal{F}\left(\Lambda \times \widehat{\Omega}\right) \to \mathcal{F}\left(\Lambda \times \widehat{\Omega}\right)$ *mit* $y \in \mathcal{F}\left(\Lambda \times \widehat{\Omega}\right)$,

$p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ *und* $\hat{z} \in \widehat{\Omega}$ *durch:*

$$\begin{aligned}
(t_0 y)(p, \hat{z}) &:= \hat{z}^{\alpha_0} y(\tau_0(p), \hat{z}), \\
(t_1 y)(p, \hat{z}) &:= (1-\hat{z})^{\alpha_1} y(\tau_1(p), \hat{z}), \\
(t_{01} y)(p, \hat{z}) &:= y\left(\tau_{01}(p), \hat{T}(\hat{z})\right), \\
(t_\infty y)(p, \hat{z}) &:= \exp(\gamma z)\, y(\tau_\infty(p), \hat{z}).
\end{aligned}$$

(4.4) Satz: *Für* $d \in D\left(\widehat{\Omega}/\Omega\right)$, $l \in \{0, 1, 01, \infty\}$, $p \in \Lambda$ *und* $y \in \mathcal{F}\left(\Lambda \times \widehat{\Omega}\right)$ *gilt:*

1. $y(\tau_l(p), \cdot) \in Kern(L(\tau_l(p))) \Rightarrow (t_l y)(p, \cdot) \in Kern(L(p))$,
2. $y(p, \cdot) \in Kern(L(p)) \Rightarrow (\Upsilon(d)\, y)(p, \cdot) \in Kern(L(p))$.

Beweis: Die erste Aussage folgt indem man die Transformationen (1.3) und (1.4) auf die Differentialgleichung (1.5) anwendet.
Sei $d \in D\left(\widehat{\Omega}/\Omega\right)$. Dann gilt $P|_G \in \mathcal{A}_\Omega$ genau dann, wenn $P|_{d(G)} \in \mathcal{A}_\Omega$. Mit

$$y \circ (P|_G)^{-1} = y \circ d^{-1} \circ d \circ (P|_G)^{-1} = y \circ d^{-1} \circ \left(P|_{d(G)}\right)^{-1},$$

folgt die zweite Behauptung. □

(4.5) Bemerkung:
Die Parametertransformationen $\tau_0, \tau_{01}, \tau_\infty$ *erzeugen eine (unendliche) Gruppe* $\mathcal{T}$ *mit* $\tau_1 \in \mathcal{T}$ *in der folgendes gilt:*

i) $\tau_0^2 = \tau_1^2 = id$

ii) $\tau_\infty^2 = (\tau_{01}^{-1})^2$

iii) $\tau_0, \tau_1, \tau_\infty$ *kommutieren untereinander*

iv) $\tau_\infty \circ \tau_{01} = \tau_{01} \circ \tau_\infty$

v) $\tau_1 \circ \tau_{01} = \tau_{01} \circ \tau_0$ *und* $\tau_0 \circ \tau_{01} = \tau_{01} \circ \tau_1$.

Beweis :
Die Aussagen in i)- iv) sind klar.
Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\tau_1 \circ \tau_{01}(p) &= \tau_1(\alpha_1, -\beta_1, \alpha_0, -\beta_0, \delta_{-\pi}(\hat{\gamma})) = (\alpha_1, -\beta_1, -\alpha_0, -\beta_0, \delta_{-\pi}(\hat{\gamma})) \\
&= \tau_{01}(-\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) = \tau_{01} \circ \tau_0(p).
\end{aligned}$$

Analog folgt $\tau_0 \circ \tau_{01} = \tau_{01} \circ \tau_1$. Damit gilt auch $\tau_1 \in \mathcal{T}$. □

(4.6) Bemerkung:
Die Transformationen ϕ_0, t_0, t_{01} und t_∞ erzeugen eine unendliche Gruppe $\mathcal{G}$ mit $\phi_1, t_1 \in \mathcal{G}$, in der folgendes gilt:

i) $t_\infty \circ t_l = t_l \circ t_\infty; l \in \{0,1\}$

ii) $(t_\infty t_{01} y)(p,\cdot) = \exp(\gamma)(t_{01} t_\infty y)(p,\cdot)$,
für $y \in \mathcal{F}\left(\Lambda \times \widehat{\Omega}\right)$ *und* $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$

iii) $t_0 \circ t_1 = t_1 \circ t_0$

iv) $t_{01} \circ t_0 = t_1 \circ t_{01}$

v) $(t_l)^2 = id$, $l \in \{0,1\}$

vi) $(t_\infty)^{-1} = t_\infty \circ (t_{01})^2$, $(t_{01})^{-1} = t_{01} \circ (t_\infty)^2$

vii) $(\phi_l t_l y)(p,\cdot) = \exp(2\pi i \alpha_l)(t_l \phi_l y)(p,\cdot)$, $l \in \{0,1\}$,
für $y \in \mathcal{F}\left(\Lambda \times \widehat{\Omega}\right)$ *und* $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$

viii) $\phi_l \circ t_{1-l} = t_{1-l} \circ \phi_l$, $l \in \{0,1\}$

ix) $\phi_l \circ t_{01} = t_{01} \circ \phi_{1-l}$, $l \in \{0,1\}$

x) $\phi_l \circ t_\infty = t_\infty \circ \phi_l$, $l \in \{0,1\}$.

Beweis :
Sei $y \in \mathcal{F}\left(\Lambda \times \widehat{\Omega}\right)$, $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ und $\hat{z} \in \widehat{\Omega}$.
Die Aussagen in i),iii), viii) und x) sind klar.
Zu ii): Wir zeigen: $(t_\infty t_{01} y)(p,\cdot) = \exp(\gamma)(t_{01} t_\infty y)(p,\cdot)$.

$$\begin{aligned}
(t_\infty t_{01} y)(p,\hat{z}) &= \exp(\gamma z)\,(t_{01} y)(\tau_\infty(p),\hat{z}) = \exp(\gamma z) y\left(\tau_{01} \circ \tau_\infty(p), \hat{T}(\hat{z})\right) \\
(t_{01} t_\infty y)(p,\hat{z}) &= (t_\infty y)(\tau_{01}(p), \hat{T}(\hat{z})) \\
&= \exp\left(\tilde{P}\left(\delta_{-\pi}(\hat{\gamma})\right) P\left(\hat{T}(\hat{z})\right)\right) y(\tau_\infty \circ \tau_{01}(p), \hat{T}(\hat{z})) \\
&= \exp\left(-\gamma(1-z)\right) y(\tau_\infty \circ \tau_{01}(p), \hat{T}(\hat{z})).
\end{aligned}$$

Mit (4.5)iv) folgt dann die Behauptung.

Zu iv): Wir zeigen $t_{01}t_0y = t_1t_{01}y$.

$$\begin{aligned}
(t_{01}t_0y)(p,\hat{z}) &= (t_0y)\left(\tau_{01}(p),\hat{T}(\hat{z})\right) = \left(\hat{T}(\hat{z})\right)^{\alpha_1} y\left(\tau_0\circ\tau_{01}(p),\hat{T}(\hat{z})\right) \\
&= (1-\hat{z})^{\alpha_1} y\left(\tau_0\circ\tau_{01}(p),\hat{T}(\hat{z})\right) \\
(t_1t_{01}y)(p,\hat{z}) &= (1-\hat{z})^{\alpha_1}(t_{01}y)(\tau_1(p),\hat{z}) \\
&= (1-\hat{z})^{\alpha_1} y\left(\tau_{01}\circ\tau_1(p),\hat{T}(\hat{z})\right)
\end{aligned}$$

Mit(4.5)v) folgt dann die Behauptung.
Zu v): Wir zeigen: $t_0t_0y = t_1t_1y = y$.

$$\begin{aligned}
(t_0t_0y)(p,\hat{z}) &= \hat{z}^{\alpha_0}(t_0y)(\tau_0(p),\hat{z}) = \hat{z}^{\alpha_0}\hat{z}^{-\alpha_0}y(\tau_0^2(p),\hat{z}) \overset{(4.5)i)}{=} y(p,\hat{z}) \\
(t_1t_1y)(p,\hat{z}) &= (1-\hat{z})^{\alpha_1}(t_1y)(\tau_1(p),\hat{z}) \\
&= (1-\hat{z})^{\alpha_1}(1-\hat{z})^{-\alpha_1}y(\tau_1^2(p),\hat{z}) \overset{(4.5)i)}{=} y(p,\hat{z})
\end{aligned}$$

Zu vi): Wir zeigen: $t_{01}t_{01}y = t_\infty^{-1}t_\infty^{-1}y$.

$$\begin{aligned}
(t_{01}t_{01}y)(p,\hat{z}) &= (t_{01}y)\left(\tau_{01}(p),\hat{T}(\hat{z})\right) = y\left(\tau_{01}^2(p),z\right) \\
(t_\infty t_\infty y)(p,\hat{z}) &= \exp(\gamma z)(t_\infty y)(\tau_\infty(p),\hat{z}) \\
&= \exp(\gamma z)\exp(-\gamma z)\,y(\tau_\infty^2(p),\hat{z}) = y(\tau_\infty^2(p),\hat{z})
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung mit (4.5)ii).
Zu vii): Wir zeigen: $(\phi_0t_0y)(p,\cdot) = \exp(2\pi i\alpha_0)(t_0\phi_0y)(p,\cdot)$.

$$\begin{aligned}
(\phi_0t_0y)(p,\hat{z}) &= (t_0y)(p,d_0(\hat{z})) = (d_0(\hat{z}))^{\alpha_0}y(\tau_0(p),d_0(\hat{z})) \\
&= \exp(2\pi i\alpha_0)\,\hat{z}^{\alpha_0}y(\tau_0(p),d_0(\hat{z})) \\
&= \exp(2\pi i\alpha_0)\,\hat{z}^{\alpha_0}(\phi_0y)(\tau_0(p),\hat{z}) = \exp(2\pi i\alpha_0)(t_0\phi_0y)(p,\hat{z})
\end{aligned}$$

Analog zeigt man: $(\phi_1t_1y)(p,\cdot) = \exp(2\pi i\alpha_1)(t_1\phi_1y)(p,\cdot)$.
Zu ix): Wir zeigen: $\phi_0t_{01}y = t_{01}\phi_1y$.

$$\begin{aligned}
(\phi_0t_{01}y)(p,\hat{z}) &= (t_{01}y)(p,d_0(\hat{z})) = y\left(\tau_{01}(p),\hat{T}\circ d_0(\hat{z})\right) \\
&= y\left(\tau_{01}(p),d_1\circ\hat{T}(\hat{z})\right) \\
&= (\phi_1y)\left(\tau_{01}(p),\hat{T}(\hat{z})\right) = (t_{01}\phi_1y)(p,\hat{z})
\end{aligned}$$

Analog zeigt man: $\phi_1t_{01}y = t_{01}\phi_0y$. □

Als nächstes werden geeignete Laplacetransformationen von globalen Lösungen der *CHE* definiert.

Hierzu verwenden wir Satz (3.22) und die in (3.15) eingeführte Parametertransformation:

(4.7) Definition:
Sei $\tau_* := \left(\alpha_0^*, \beta_0^*, \alpha_1^*, \beta_1^*, \hat{\gamma}^*\right) : \Lambda \to \Lambda$ *die für* $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma) \in \Lambda$ *durch*

$$\alpha_0^*(p) := \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} + \frac{\beta_0 + \beta_1}{\gamma}, \quad \alpha_1^*(p) := \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} - \frac{\beta_0 + \beta_1}{\gamma}, \quad \hat{\gamma}^*(p) := \hat{\gamma},$$

$$\beta_0^*(p) := \frac{1}{4}\gamma\left(\alpha_0 - \alpha_1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\left(\alpha_0 - \alpha_1\right)^2}{4} - \frac{\left(\beta_0 + \beta_1\right)^2}{\gamma^2}\right) + \frac{\beta_0 - \beta_1}{2},$$

$$\beta_1^*(p) := \frac{1}{4}\gamma\left(\alpha_0 - \alpha_1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\left(\alpha_0 - \alpha_1\right)^2}{4} - \frac{\left(\beta_0 + \beta_1\right)^2}{\gamma^2}\right) - \frac{\beta_0 - \beta_1}{2}$$

definierte Transformation.

Wir listen Eigenschaften von τ_* auf.

(4.8) Lemma:

1. τ_* *ist ein partiell holomorpher Homöomorphismus mit* $\tau_* \circ \tau_* = id_\Lambda$.

2. *Invarianten: Für* $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ *gilt*

   (a) $\alpha_0 + \alpha_1 = \alpha_0^*(p) + \alpha_1^*(p)$,

   (b) $\left(\beta_0 + \beta_1\right)^2 + \gamma^2\left(\beta_1 - \beta_0\right) = \left(\beta_0^*(p) + \beta_1^*(p)\right)^2 + \left(\gamma^*(p)\right)^2\left(\beta_1^*(p) - \beta_0^*(p)\right)$,

   (c) $\beta_0 - \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_0) - \frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)$
   $= \beta_0^*(p) - \frac{1}{2}\gamma^*(p)(1-\alpha_0^*(p)) - \frac{1}{2}(1-\alpha_0^*(p))(1-\alpha_1^*(p))$.

3. *Zusammenhänge:*

   (a) *Mit* $\tau_\infty, \tau_{01}, \tau_0$ *und* τ_1 *aus Definition (4.2) folgt:*
   $\tau_\infty^{-1} \circ \tau_* = \tau_* \circ \tau_{01}$,
   $\tau_0 \circ \tau_* = \tau_* \circ \tau_0 \circ \tau_* \circ \tau_0$,
   $\tau_1 \circ \tau_* = \tau_* \circ \tau_1 \circ \tau_* \circ \tau_1$,
   $\tau_{01} \circ \tau_1 \circ \tau_0 \circ \tau_\infty = \tau_* \circ \tau_1 \circ \tau_0 \circ \tau_*$.

   (b) *Für* $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ *gilt:*

$$\begin{aligned}\left(\beta_0^*(p) - \beta_0\right) - \left(\beta_1^*(p) - \beta_1\right) &= \left(\alpha_0 - \alpha_1^*(p)\right)\left(\alpha_0 - \alpha_0^*(p)\right)\\ &= \left(\alpha_1 - \alpha_1^*(p)\right)\left(\alpha_1 - \alpha_1^*(p)\right).\end{aligned}$$

Beweis:
Zu 1.: Die partielle Holomorphie und Stetigkeit von τ_* folgen sofort.
Mit Hilfe von (3.15) erhält man $\tau_* \circ \tau_* = \mathrm{id}_\Lambda$.
Zu 2.: Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ und $\tau_*(p) =: (\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \hat{\gamma})$.
(a) folgt direkt aus (3.20). (c) folgt aus (3.19).
Zu (b): Aus (3.21) folgt $\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1 = \frac{1}{2}\gamma\,(\alpha_0 - \alpha_1)$ und damit

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_0 = \beta_0^*(p) \quad &= \quad \frac{1}{4}\gamma\,(\alpha_0 - \alpha_1) + \frac{1}{2}\left(\frac{(\alpha_0 - \alpha_1)^2}{4} - \frac{(\beta_0 + \beta_1)^2}{\gamma^2}\right) + \frac{\beta_0 - \beta_1}{2} \\ &= \quad \frac{1}{2}\left(\tilde{\beta}_0 + \tilde{\beta}_1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\left(\tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_1\right)^2}{\gamma^2} - \frac{(\beta_0 + \beta_1)^2}{\gamma^2}\right) + \frac{\beta_0 - \beta_1}{2}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung.
Zu 3.(a): Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ und $\tau_*(p) =: (\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \hat{\gamma})$.
<u>Zur ersten Gleichung:</u> Dann gilt $\tau_{01} \circ \tau_*(p) = \left(\tilde{\alpha}_1, -\tilde{\beta}_1, \tilde{\alpha}_0, -\tilde{\beta}_0, \delta_{-\pi}\,(\hat{\gamma})\right)$.
Sei nun $(a_+, b_+, a_-, b_-, \delta_{-\pi}\,(\hat{\gamma})) := \tau_*(\tilde{\alpha}_1, -\tilde{\beta}_1, \tilde{\alpha}_0, -\tilde{\beta}_0, \delta_{-\pi}\,(\hat{\gamma}))$. Dann ist

$$\begin{aligned}a_\pm \quad &= \quad \frac{\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_0}{2} \pm \frac{-\tilde{\beta}_1 - \tilde{\beta}_0}{\tilde{P}\,(\delta_{-\pi}\,(\hat{\gamma}))} = \frac{\tilde{\alpha}_1 + \tilde{\alpha}_0}{2} \pm \frac{\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_0}{\gamma} \overset{1.}{=} \alpha_{0/1}, \\ b_\pm \quad &= \quad \frac{1}{4}\tilde{P}\,(\delta_{-\pi}\,(\hat{\gamma}))\,(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0) \pm \frac{1}{2}\left(\frac{(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0)^2}{4} - \frac{(-\tilde{\beta}_1 + (-\tilde{\beta}_0))^2}{(\tilde{P}\,(\delta_{-\pi}\,(\hat{\gamma})))^2}\right) \\ &\quad\ \pm \frac{-\tilde{\beta}_1 - (-\tilde{\beta}_0)}{2} \\ &= \quad \frac{1}{4}\gamma(\tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_1) \pm \frac{1}{2}\left(\frac{(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_0)^2}{4} - \frac{(\tilde{\beta}_1 + \tilde{\beta}_0)^2}{\gamma^2}\right) \pm \frac{\tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_1}{2} = \beta_{0/1}.\end{aligned}$$

Damit gilt $\tau_\infty^{-1}(p) = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \delta_{-\pi}\,(\hat{\gamma})) = \tau_* \circ \tau_{01} \circ \tau_*(p)$ und somit die Behauptung.
<u>Zur zweiten Gleichung:</u> Sei

$$\begin{aligned}&\tau_* \circ \tau_0(p) = \tau_*(-\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma) =: (a_+, b_+, a_-, b_-, \hat{\gamma}), \\ &\tau_* \circ \tau_0 \circ \tau_*(p) = \tau_*(-\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \hat{\gamma}) =: (\tilde{a}_+, \tilde{b}_+, \tilde{a}_-, \tilde{b}_-, \hat{\gamma}).\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}a_\pm =& \frac{-\alpha_0 + \alpha_1}{2} \pm \frac{\beta_0 + \beta_1}{\gamma} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} \pm \frac{\beta_0 + \beta_1}{\gamma} - \alpha_0 \\ =& \alpha_{0/1}^*(p) - \alpha_0 = \tilde{\alpha}_{0/1} - \alpha_0.\end{aligned}$$

Genauso gilt $\tilde{a}_\pm = \alpha_{0/1} - \tilde{\alpha}_0$. Daher folgt $a_+ = -\tilde{a}_+$ und wegen 2.(a): $a_- = \tilde{a}_-$.

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
b_\pm &= -\frac{1}{4}(\alpha_0+\alpha_1) \pm \frac{1}{2}\left(\frac{(\alpha_0+\alpha_1)^2}{4} - \frac{(\beta_0+\beta_1)^2}{\gamma^2}\right) \pm \frac{\beta_0-\beta_1}{2},\\
\tilde{b}_\pm &= -\frac{1}{4}(\tilde{\alpha}_0+\tilde{\alpha}_1) \pm \frac{1}{2}\left(\frac{(\tilde{\alpha}_0+\tilde{\alpha}_1)^2}{4} - \frac{(\tilde{\beta}_0+\tilde{\beta}_1)^2}{\gamma^2}\right) \pm \frac{\tilde{\beta}_0-\tilde{\beta}_1}{2}.
\end{aligned}$$

Mit 2.(a) und 2.(b) folgt $\tilde{b}_\pm = b_\pm$ und damit

$$\tau_* \circ \tau_0(p) = (a_+, b_+, a_-, b_-, \hat{\gamma}) = (-\tilde{a}_+, \tilde{b}_+, \tilde{a}_-, \tilde{b}_-, \hat{\gamma}) = \tau_0 \circ \tau_* \circ \tau_0 \circ \tau_*(p).$$

Zur dritten Gleichung: Der Beweis ist analog.
Zur vierten Gleichung: Es gilt $\tau_0 \circ \tau_1 \circ \tau_*(p) = (-\tilde{\alpha}_0, \tilde{\beta}_0, -\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, \hat{\gamma})$. Setzt man $\tau_* \circ \tau_0 \circ \tau_1 \circ \tau_*(p) =: (a_+, b_+, a_-, b_-, \hat{\gamma})$ so folgt

$$\begin{aligned}
a_\pm &= -\frac{\tilde{\alpha}_0+\tilde{\alpha}_1}{2} \pm \frac{\tilde{\beta}_0+\tilde{\beta}_1}{\gamma} = -\alpha_{1/0},\\
b_\pm &= -\frac{1}{4}(\tilde{\alpha}_0-\tilde{\alpha}_1) \pm \frac{1}{2}\left(\frac{(\tilde{\alpha}_0-\tilde{\alpha}_1)^2}{4} - \frac{(\tilde{\beta}_0+\tilde{\beta}_1)^2}{\gamma^2}\right) \pm \frac{\tilde{\beta}_0-\tilde{\beta}_1}{2} = -\beta_{1/0}.
\end{aligned}$$

Somit ist $\tau_* \circ \tau_1 \circ \tau_0 \circ \tau_*(p) = (-\alpha_1, -\beta_1, -\alpha_0, -\beta_0, \hat{\gamma}) = \tau_{01} \circ \tau_0 \circ \tau_1 \circ \tau_\infty(p)$. Hieraus folgt die Behauptung.
Zu 3.(b): Aus $\tilde{\beta}_0 = \frac{1}{4}\gamma(\alpha_0 - \alpha_1) + \frac{1}{2}\left(\frac{(\alpha_0-\alpha_1)^2}{4} - \frac{(\beta_0+\beta_1)^2}{\gamma^2}\right) + \frac{\beta_0-\beta_1}{2}$ und 2.(a) folgt $\tilde{\beta}_0 = \frac{1}{2}(\tilde{\beta}_0+\tilde{\beta}_1) + \frac{1}{2}\left(\frac{(\alpha_0-\alpha_1)^2}{4} - \frac{(\tilde{\alpha}_0-\tilde{\alpha}_1)^2}{4}\right) + \frac{\beta_0-\beta_1}{2}$ und damit

$$(\tilde{\beta}_0 - \beta_0) - (\tilde{\beta}_1 - \beta_1) = \frac{1}{4}(\alpha_0 - \alpha_1 + \tilde{\alpha}_0 - \tilde{\alpha}_1)(\alpha_0 - \alpha_1 - \tilde{\alpha}_0 + \tilde{\alpha}_1).$$

Verwendet man nun wieder 2.(a) so folgt die Behauptung. □

(4.9) Definition:
Für $\xi \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\hat{\varphi}_\xi$ die bzgl. P durch $\hat{\varphi}_\xi(0) = \hat{\omega}_+$ eindeutige Liftung der Kurve $\varphi_\xi : [0, \infty[\to \Omega$, mit

$$\varphi_\xi(t) := \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{i}{\sqrt{2}}\exp(i\left(\xi - \frac{\pi}{2}\right)t), & t \in [0,1] \\ \frac{1}{2} + t\frac{1}{\sqrt{2}}\exp(i\xi), & t \in [1, \infty[\end{cases}.$$

Für $l \in \{0,1\}$ definieren wir mit $\hat{\vartheta}_l$ aus (2.2) die Kurve

$$S_l^\xi := \left(-\hat{\varphi}_\xi + \hat{\vartheta}_l\right) + d_l \circ \hat{\varphi}_\xi,$$

wobei wir mit + die übliche Verkettung zweier Kurven und mit $-\hat{\varphi}_\xi$ die zu $\hat{\varphi}_\xi$ entgegengesetzte Kurve meinen.
Wir bezeichnen außerdem für $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\hat{H}_\varphi := \left\{ \hat{z} \in \widehat{\Omega}^+_\infty \middle| |\arg_0(\hat{z}) - \varphi| < \frac{\pi}{2} \text{ und } |\arg_1(\hat{z}) - \varphi| < \frac{\pi}{2} \right\} \subset \widehat{\Omega}^+_\infty$$

und $H_\varphi := P(\hat{H}_\varphi) \subset \Omega_\infty$. H_φ ist eine Halbebene.

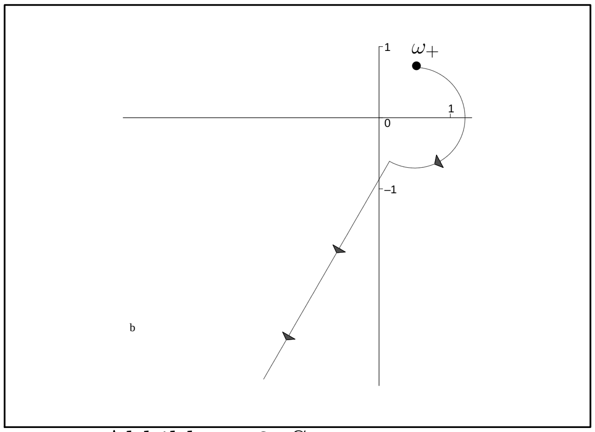


Abbildung 2: Spur von $\varphi_{-\frac{2\pi}{3}}$

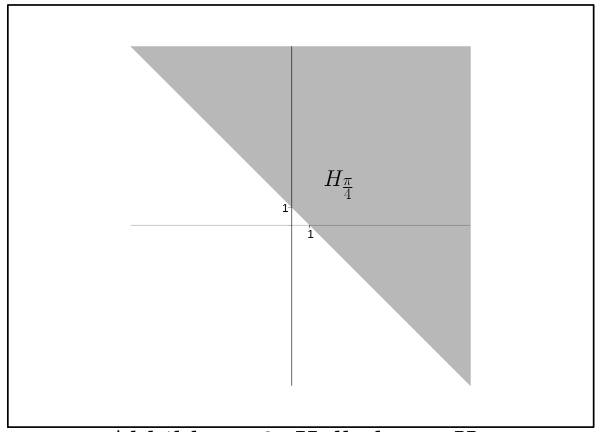


Abbildung 3: Halbebene $H_{\frac{\pi}{4}}$

(4.10) Satz,Definition:
Es sei $l \in \{0,1\}$. Zu jeder Funktion $y \in \mathcal{F}\left(\Lambda \times \widehat{\Omega}\right)$ mit

$$y(p,\cdot) \in Kern\,(L(p))\,, \quad p \in \Lambda$$

existiert genau eine Funktion $(\mathcal{L}_l y) \in \mathcal{F}\left(\Lambda \times \widehat{\Omega}\right)$ mit

$$(\mathcal{L}_l y)\,(p,\cdot) \in Kern\,(L(p))\,, \quad p \in \Lambda,$$

so dass für alle $\xi \in \mathbb{R}$, $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ und $\hat{z} \in \hat{H}_{\xi+\pi-\arg(\hat{\gamma})}$

$$(\mathcal{L}_l y)\,(p,\hat{z}) = \int_{S_l^{-\xi}} \exp\left(\gamma z P(\cdot)\right) \varpi(-\alpha_0^*(p), -\alpha_1^*(p), -\gamma, \cdot) y(\tau_*(p), \cdot),$$

gilt. Ist die Funktion y stetig und partiell holomorph, so gilt dies auch für $(\mathcal{L}_l y)$.
Beweis:
Sei $y \in \mathcal{F}\left(\Lambda \times \widehat{\Omega}\right)$ mit $y(p,\cdot) \in \text{Kern}\,(L(p))$ für alle $p \in \Lambda$ und sei $l \in \{0,1\}$.
Wir bezeichnen dann für $\hat{t}, \hat{z} \in \widehat{\Omega}$ und $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$:

$$v(p,\hat{z},\hat{t}) := \exp(\gamma z t) \varpi\left(-\alpha_0^*(p), -\alpha_1^*(p), -\gamma, \hat{t}\right) y\left(\tau_*(p), \hat{t}\right).$$

Es sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$. Aus der allgemeinen Theorie weiß man:
Für jedes $\varphi \in \mathbb{R}$ existiert ein Fundamentalsystem y_1, y_2 von $L(\tau_*(p))y = 0$ mit Asymptotik

$$y_1(\hat{t}) \sim \hat{t}^{\nu_1} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^1 t^{-n}\right), \; y_2(\hat{t}) \sim \exp(\gamma t)\, \hat{t}^{\nu_2} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 t^{-n}\right), \; t \to \infty, \tag{4.11}$$

für $\hat{t} \in \hat{H}_\varphi$, mit $(c_n^1)_n, (c_n^2)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ und $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{C}$.
Also gibt es für jeden abgeschlossenen Teilsektor von $\hat{H}_\varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$

$$\overline{S}_r(\varphi_1, \varphi_2) := \{\hat{z} \in \widehat{\Omega}_\infty^+ \,|\, |z| \geq r, \varphi_1 \leq \arg_0(\hat{z}), \arg_1(\hat{z}) \leq \varphi_2\} \tag{4.12}$$

mit $\varphi - \frac{\pi}{2} < \varphi_1 < \varphi_2 < \varphi + \frac{\pi}{2}$ und $r > 1$ sowie Konstanten $\nu, q \in \mathbb{R}^+$, so dass für $\hat{t} \in \overline{S}_r(\varphi_1, \varphi_2)$ und $\hat{z} \in \widehat{\Omega}$ gilt:

$$\left|v(p, \hat{z}, \hat{t})\right| \leq q|t|^\nu \exp(\max\{\mathrm{Re}(\gamma(z-1)t), \mathrm{Re}(\gamma z t)\}). \tag{4.13}$$

Für $\hat{z} \in \widehat{\Omega}$, $\xi \in \mathbb{R}$ und $t = \frac{1}{2} + \tau \exp(-i\xi)$, $\tau > \frac{1}{\sqrt{2}}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\exp(\mathrm{Re}(\gamma z t)) &= \exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\gamma z)\right) \exp(\tau|\gamma z| \cos(\arg(\hat{\gamma}) + \arg_0(\hat{z}) - \xi)), \\
\exp(\mathrm{Re}(\gamma(z-1)t)) &= \exp\left(\frac{1}{2}\mathrm{Re}(\gamma(z-1))\right) \cdot \\
&\quad \exp(\tau|\gamma(z-1)| \cos(\arg(\hat{\gamma}) + \arg_1(\hat{z}) - \xi)).
\end{aligned}$$

Daher folgt wegen (4.13) und $\cos(t) < 0$, $|t - \pi| < \frac{\pi}{2}$, dass das uneigentliche Integral $I_\xi^l(\hat{z}) := \int_{S_l^{-\xi}} v(p, \hat{z}, \cdot)$ für $\hat{z} \in \hat{H}_{\xi + \pi - \arg(\hat{\gamma})}$ lokal gleichmäßig konvergiert. Entsprechend ergibt sich

$$\varpi(1 - \alpha_0^*(p), 1 - \alpha_1^*(p), -\gamma, \cdot) \exp(\gamma z P(\cdot)) \left(y(\tau_*(p), \cdot) \cdot z \cdot \gamma - y'(\tau_*(p), \cdot)\right)\Big|_{S_l^{-\xi}} = 0.$$

Damit sind die Voraussetzungen von (3.22) mit $y_1 := y(\tau_*(p), \cdot)$ erfüllt. Die hieraus resultierende Lösung y_2 bezeichnen wir mit $(\mathcal{L}_l y)(p, \cdot)$. Diese erfüllt

$$(\mathcal{L}_l y)(p, \hat{z}) = I_\xi^l(\hat{z}), \; \hat{z} \in \hat{H}_{\xi + \pi - \arg(\hat{\gamma})}$$

und ist zunächst von ξ abhängig. Wir zeigen zunächst deren Unabhängigkeit von ξ.
Seien nun $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ mit $0 < \xi_1 - \xi_2 < \pi$, $\hat{z} \in \hat{H}_{\xi_1 + \pi - \arg(\hat{\gamma})} \cap \hat{H}_{\xi_2 + \pi - \arg(\hat{\gamma})} \neq \emptyset$ vorausgesetzt. Wir zeigen: $I_{\xi_1}^l(\hat{z}) = I_{\xi_2}^l(\hat{z})$.
Hierzu betrachten wir für $r > 1$ und $\xi \in \mathbb{R}$ die Kurve

$$\hat{\varphi}_\xi^r := \hat{\varphi}_\xi|_{[0,r]} : [0, r] \ni t \longrightarrow \hat{\varphi}_\xi(t) \in \widehat{\Omega}$$

und die Liftung $\hat{\varphi}^r_{-\xi_1,-\xi_2} : [0,1] \to \widehat{\Omega}$ der Kurve

$$\varphi^r_{-\xi_1,-\xi_2} : [0,1] \ni t \to \frac{1}{2} + \frac{r}{\sqrt{2}} \exp\left(i(-\xi_1)(1-t) + i(-\xi_2)t\right) \in \mathbb{C}$$

mit $\hat{\varphi}^r_{-\xi_1,-\xi_2}(0) = \hat{\varphi}_{-\xi_1}(r) = \hat{\varphi}^r_{-\xi_1}(r)$.
Da die Kurven $\varphi^r_{-\xi_1} + \varphi^r_{-\xi_1,-\xi_2}$ und $\varphi^r_{-\xi_2}$ homotop sind (wobei mit + die übliche Verknüpfung zweier Kurven gemeint ist), so sind auch die Kurven $\hat{\varphi}^r_{-\xi_1} + \hat{\varphi}^r_{-\xi_1,-\xi_2}$ und $\hat{\varphi}^r_{-\xi_2}$ homotop zueinander, weil beide bei $\hat{\omega}_+$ starten. Damit folgt

$$\begin{aligned} I^l_{\xi_1}(\hat{z}) - I^l_{\xi_2}(\hat{z}) &= \left(\int_{\hat{\varphi}_{-\xi_2}} - \int_{\hat{\varphi}_{-\xi_1}} + \int_{d_l \circ \hat{\varphi}_{-\xi_1}} - \int_{d_l \circ \hat{\varphi}_{-\xi_2}} \right) v(p, \hat{z}, \cdot) \\ &= \lim_{r \to \infty} \left(\int_{\hat{\varphi}^r_{-\xi_2}} - \int_{\hat{\varphi}^r_{-\xi_1}} + \int_{d_l \circ \hat{\varphi}^r_{-\xi_1}} - \int_{d_l \circ \hat{\varphi}^r_{-\xi_2}} \right) v(p, \hat{z}, \cdot) \end{aligned}$$

und wegen des Cauchyschen Integralsatzes

$$I^l_{\xi_1}(\hat{z}) - I^l_{\xi_2}(\hat{z}) = \lim_{r \to \infty} \left(\int_{\hat{\varphi}^r_{-\xi_1,-\xi_2}} - \int_{d_l \circ \hat{\varphi}^r_{-\xi_1,-\xi_2}} \right) v(p, \hat{z}, \cdot).$$

Da $\max\left\{\mathrm{Re}\left(\gamma(z-1) r \exp(i\xi)\right), \mathrm{Re}\left(\gamma z r \exp(i\xi)\right)\right\} < 0 \ \forall \xi \in [-\xi_1, -\xi_2]$, so gilt

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \xi \in [-\xi_1, -\xi_2] : \max\left\{\mathrm{Re}\left(\gamma(z-1) r \exp(i\xi)\right), \mathrm{Re}\left(\gamma z r \exp(i\xi)\right)\right\} < -\varepsilon.$$

Über (4.13) erhält man dann

$$\exists q, \nu > 0 : \left| \int_{\hat{\varphi}^r_{-\xi_1,-\xi_2}} v(p, \hat{z}, \cdot) \right|, \left| \int_{d_l \circ \hat{\varphi}^r_{-\xi_1,-\xi_2}} v(p, \hat{z}, \cdot) \right| \leq q r^\nu e^{-\varepsilon r} \longrightarrow 0, \ (r \to \infty).$$

Sei nun y stetig und partiell holomorph.
Dies liefert die ξ Unabhängigkeit von $(\mathcal{L}y)(p, \cdot)$.

Wir zeigen nun die Stetigkeit und partielle Holomorphie von $\tilde{y} := \mathcal{L}y$. Da $\tilde{y}(p, \cdot)$ für $p \in \Lambda$ Lösung von $L(p)y = 0$ ist, genügt es die Holomorphie der Anfangswerte von $\tilde{y}$ an einer beliebigen Stelle $\hat{z}_0$ aus $\widehat{\Omega}$ zu zeigen.

Sei $K_1 \subset \mathbb{C}^4$ kompakt, $\hat{\gamma}_1 \in \widehat{\mathbb{C}^*}$ und $K_2 \subset \{\hat{\gamma} \in \widehat{\mathbb{C}^*} \| \arg(\hat{\gamma}) - \arg(\hat{\gamma}_1)| \leq \frac{\pi}{3}\}$ mit K_2 kompakt.
Wir bezeichnen dann für $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in K_1 \times K_2$:

$$y_0(p, \cdot) := \varpi\left(-\alpha_0^*(p), -\alpha_1^*(p), -\gamma, \cdot\right) y\left(\tau_*(p), \cdot\right) \text{ sowie } u(p, \cdot) := \begin{pmatrix} y_0\,(p, \cdot) \\ y'\,(p, \cdot) \end{pmatrix}.$$

Für alle $p \in K_1 \times K_2$ erfüllt $u(p, \cdot)$ eine Vektor Differentialgleichung der Form $u'(p, \cdot) = F(p, z) u'(p, \cdot)$, wobei ein $c > 0$ existiert mit:

$$|F(p, z)|_\infty < c, \ p \in K_1 \times K_2, \ |z| \geq 2.$$

Sei $\hat{Z} := \overline{S}_2\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ ein abgeschlossener Teilsektor von $\hat{H}_0$, wie in (4.12) definiert. Aufgrund von Satz (4.5.3) aus [14] gilt für $\hat{t} \in \hat{Z}$ und $p \in K_1 \times K_2$:

$$\begin{aligned} |y_0(p,\hat{t})| \leq |u(p,\hat{t})|_\infty &\leq \max_{\hat{t}\in\hat{Z},|t|=2} |u\left(p,\hat{t}\right)|_\infty \exp\left(\int_{\frac{1}{|t|}}^{\frac{1}{2}} \max_{|z|=\xi} \left|\frac{1}{z^2} F\left(\frac{1}{z}\right)\right| d\xi\right) \\ &= \max_{\hat{t}\in\hat{Z},|t|=2} |u\left(p,\hat{t}\right)|_\infty \exp\left(\int_2^{|t|} \max_{|u|=\xi} |F(u)|\, d\xi\right) \qquad (4.14) \\ &\leq \max_{\hat{t}\in\hat{Z},|t|=2} |u\left(p,\hat{t}\right)|_\infty \exp(c(|t|-2)). \end{aligned}$$

Da y stetig und partiell holomorph ist, gilt dies auch für u. Somit existiert ein $k > 0$ mit:

$$|y_0(p,\hat{t})| \leq k \exp(c|t|), \quad \hat{t} \in \hat{Z},\ p \in K_1 \times K_2.$$

Sei $\tilde{\gamma} := \max\{|\gamma| \,|\hat{\gamma} \in K_2\}$.
Aus der Definition von K_2 folgt die Existenz eines $\hat{z}_0 \in \bigcap\limits_{\hat{\gamma}\in K_2} \hat{H}_{\pi-\arg(\hat{\gamma})}$ mit

$$\arg_0(\hat{z}_0) = \pi - \arg(\hat{\gamma}_1) \text{ und } |z_0| > \frac{2c}{\tilde{\gamma}}.$$

Ferner existiert ein $\tau_0 > 1$ mit Spur $\left(\hat{\varphi}_0|_{[\tau_0,\infty[}\right) \subset \hat{Z}$. Damit gilt für $\tau \geq \tau_0$ und $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in K_1 \times K_2$:

$$\begin{aligned} |\exp(\gamma z_0 \varphi_0(\tau))\, y_0(p, \hat{\varphi}_0(\tau))| &\leq k \exp\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{\sqrt{2}}\right)(\mathrm{Re}(\gamma z_0) + c)\right) \\ &\leq k \exp\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{\sqrt{2}}\right)(\tilde{\gamma}|z_0| \cos(\arg(\hat{\gamma}) + \pi - \arg(\hat{\gamma}_1)) + c)\right) \\ &\leq k \exp\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{2}\tilde{\gamma}|z_0| + c\right)\right). \end{aligned}$$

Aufgrund von $-\frac{1}{2}\tilde{\gamma}|z_0| + c < 0$ konvergiert das Integral $\int_{\hat{\varphi}_0} v(p, \hat{z}_0, \cdot)$ gleichmäßig für $p \in K_1 \times K_2$. Analog lässt sich dies auch für $\int_{d_0 \circ \hat{\varphi}_0} v(p, \hat{z}_0, \cdot)$ und $\int_{d_1 \circ \hat{\varphi}_0} v(p, \hat{z}_0 \cdot)$ zeigen. Wie üblich folgt dann die partielle Holomorphie und Stetigkeit von $\tilde{y}(\cdot, \hat{z}_0)$ und $\partial_6 \tilde{y}(\cdot, \hat{z}_0)$. □

(4.15) Bemerkung:
Sei $y \in \mathcal{F}\left(\Lambda \times \widehat{\Omega}\right)$ mit $y(p,\cdot) \in Kern(L(p))$ für alle $p \in \Lambda$.
Dann gilt für $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$:

i) $(t_\infty^{-1}\mathcal{L}_0 y)(p,\cdot) = -\exp(\gamma - 2\pi i \alpha_1^*(p))(\mathcal{L}_1 \phi_1 t_{01} y)(p,\cdot)$,
$(t_\infty^{-1}\mathcal{L}_1 y)(p,\cdot) = -\exp(\gamma + 2\pi i \alpha_0^*(p))\left(\phi_\infty^{-1}\mathcal{L}_0 \phi_0^{-1} t_{01} y\right)(p,\cdot)$,
$(t_\infty^{-2}\mathcal{L}_l y)(p,\cdot) = (\phi_\infty^{-1}\mathcal{L}_l t_{01}^2 y)(p,\cdot)$, $l \in \{0,1\}$.

ii) $(t_{01}\mathcal{L}_l y)(p,\cdot) = \left(\phi_1^{-1}\mathcal{L}_l t_\infty^{-1} y\right)(p,\cdot),\ l \in \{0,1\}$,
$(t_{01}^2\mathcal{L}_l y)(p,\cdot) = (\phi_\infty^{-1}\mathcal{L}_l t_\infty^{-2} y)(p,\cdot),\ l \in \{0,1\}$.

Um entsprechende Formeln für $t_0 \circ \mathcal{L}_l$, $t_1 \circ \mathcal{L}_l$ zu erhalten, müsste man Integraltransformation mit Kernen der Form $K\left(\hat{z},\hat{t}\right) := (z+t-1)^\lambda = (t-T(z))^\lambda$ betrachten.

Beweis: Sei $\xi \in \mathbb{R}$ und $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ fest.
Für $\hat{z} \in \hat{H}_{\xi-\arg(\delta_{-\pi}(\hat{\gamma}))+\pi} = \hat{H}_{\xi-\arg(\hat{\gamma})+2\pi} = \hat{H}_{(\xi+\pi)-\arg(\hat{\gamma})+\pi}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
&\left(t_\infty^{-1}\mathcal{L}_0 y\right)(p,\hat{z}) = \exp(\gamma z)\,(\mathcal{L}_0 y)\left(\tau_\infty^{-1}(p),\hat{z}\right)\\
&= \int_{S_0^{-\xi}} \exp\left(\gamma z(1-P(\cdot))\right)\\
&\qquad \varpi(-\alpha_0^*\left(\tau_\infty^{-1}(p)\right), -\alpha_1^*\left(\tau_\infty^{-1}(p)\right), -P\left(\delta_{-\pi}\left(\hat{\gamma}\right)\right),\cdot) y\left(\tau_*\left(\tau_\infty^{-1}(p)\right),\cdot\right)\\
&\overset{(4.8)3a}{=} \int_{S_0^{-\xi}} \exp\left(\gamma z(1-P(\cdot))\right)\varpi(-\alpha_1^*(p), -\alpha_0^*(p), \gamma,\cdot) y\left(\tau_{01}\circ\tau_*(p),\cdot\right)\\
&\overset{(*)}{=} -\exp(\gamma)\int_{\hat{T}\circ S_0^{-\xi}} \exp\left(\gamma z P(\cdot)\right)\varpi(-\alpha_0^*(p), -\alpha_1^*(p), -\gamma,\cdot) y\left(\tau_{01}\circ\tau_*(p),\hat{T}(\cdot)\right)\\
&= -\exp(\gamma)\int_{\hat{T}\circ S_0^{-\xi}} \exp\left(\gamma z P(\cdot)\right)\varpi(-\alpha_0^*(p), -\alpha_1^*(p), -\gamma,\cdot)\,(t_{01}y)\left(\tau_*(p),\cdot\right).
\end{aligned}
$$

Die Gleichung $(*)$ ist erfüllt, da

$$
\begin{aligned}
&\exp\left(\gamma z(1-t)\right)\varpi(-\alpha_1^*(p), -\alpha_0^*(p), \gamma, \hat{t}) y\left(\tau_{01}\circ\tau_*(p),\hat{t}\right)\\
=\ &\exp\left(\gamma z(1-t)\right)\hat{t}^{-\alpha_1^*(p)}\left(\hat{T}\left(\hat{t}\right)\right)^{-\alpha_0^*(p)}\exp(\gamma z)\, y\left(\tau_{01}\circ\tau_*(p),\hat{t}\right)\\
=\ &\exp(\gamma)\exp\left(\gamma z P\left(\hat{T}(\hat{t})\right)\right)\varpi\left(-\alpha_0^*(p), -\alpha_1^*(p), -\gamma, \hat{T}\left(\hat{t}\right)\right)\\
&\qquad y\left(\tau_{01}\circ\tau_*(p),\hat{T}^2\left(\hat{t}\right)\right)
\end{aligned}
$$

für $\hat{t},\hat{z} \in \widehat{\Omega}$ gilt.
Wir zeigen nun für $\hat{z} \in H_{\xi-\arg(\hat{\gamma})+2\pi} = H_{(\xi+\pi)-\arg(\hat{\gamma})+\pi}$:

$$
\left(\int_{\hat{T}\circ S_0^{-\xi}} - \int_{d_1\circ S_1^{-\xi-\pi}}\right)\exp\left(\gamma z P(\cdot)\right)\varpi(-\alpha_0^*(p), -\alpha_1^*(p), -\gamma,\cdot)\,(t_{01}y)\left(\tau_*(p),\cdot\right) = 0.
$$

Hierzu betrachten wir $P\circ\hat{T}\circ\hat{\varphi}_{-\xi} = T\circ P\circ\hat{\varphi}_{-\xi} = T\circ\varphi_{-\xi}$ mit

$$
\begin{aligned}
T\circ\varphi_{-\xi}(t) &= \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{i}{\sqrt{2}}\exp(i\left(-\xi-\frac{\pi}{2}\right)t), & t\in[0,1] \\ \frac{1}{2} - \frac{t}{\sqrt{2}}\exp\left(-i\xi\right), & t \in [1,\infty[\end{cases}\\
&= \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{i}{\sqrt{2}}\exp\left(i\left(-\xi-\frac{\pi}{2}\right)t - i\pi\right), & t\in[0,1] \\ \frac{1}{2} + \frac{t}{\sqrt{2}}\exp\left(i\left(-\xi-\pi\right)\right), & t \in [1,\infty[\end{cases}
\end{aligned}
$$

und $P \circ d_1 \circ \hat{\varphi}_{-\xi-\pi} = \varphi_{-\xi-\pi}$ mit

$$\varphi_{-\xi-\pi}(t) \quad = \quad \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{i}{\sqrt{2}} \exp\left(i\left(-\xi - \pi - \frac{\pi}{2}\right)t\right), \ t \in [0,1] \\ \frac{1}{2} + \frac{t}{\sqrt{2}} \exp\left(i\left(-\xi - \pi\right)\right), \ t \in [1, \infty[\end{cases} .$$

Also gilt $P \circ d_1 \circ \hat{\varphi}_{-\xi-\pi}(1) = P \circ \hat{T} \circ \hat{\varphi}_{-\xi}(1)$. Wir zeigen nun $d_1 \circ \hat{\varphi}_{-\xi-\pi}(1) = \hat{T} \circ \hat{\varphi}_{-\xi}(1)$. Da $\mathrm{Spur}\left(\hat{\varphi}_{-\xi}\right), \mathrm{Spur}\left(\hat{\varphi}_{-\xi-\pi}\right) \subset \widehat{\Omega}_\infty^+$, so gilt wegen (2.18)

$$\mathrm{Spur}\left(\hat{T} \circ \hat{\varphi}_{-\xi}\right), \mathrm{Spur}\left(d_1 \circ \hat{\varphi}_{-\xi-\pi}\right) \subset \widehat{\Omega}_\infty^-.$$

Außerdem gilt $d_1 \circ \hat{\varphi}_{-\xi-\pi}(0) = d_1\left(\hat{\omega}_+\right)$ und $\hat{T} \circ \hat{\varphi}_{-\xi}(0) = \hat{T}\left(\hat{\omega}_+\right) = \hat{\omega}_-$. Aus der Definition von $\hat{\vartheta}_1$, folgt $\hat{\vartheta}_1(1) = d_1\left(\hat{\omega}_+\right)$ und die Existenz eines $t_0 \in]0,1[$ mit $\hat{\vartheta}_1(t_0) = \hat{\omega}_-$. Da $\varphi : [0,1] \ni t \to \vartheta_\infty\left(\frac{t+1}{2}\right)$ homotop zu $\vartheta_1|_{[t_0,1]}$ ist, so ist die durch $\hat{\varphi}\left(0\right) = \hat{\omega}_-$ eindeutig festgelegte Liftung $\hat{\varphi} : [0,1] \to \widehat{\Omega}$ von φ homotop zu $\hat{\vartheta}_1|_{[t_0,1]}$ und es gilt daher $\hat{\varphi}\left(1\right) = d_1\left(\hat{\omega}_+\right)$.
Mit Hilfe einer Homotopie im Argument zeigt man leicht, dass die Kurven $\varphi + \varphi_{-\xi-\pi}|_{[0,1]}$ und $T \circ \varphi_{-\xi}|_{[0,1]}$ in Ω homotop sind.
Somit sind die Kurven $\hat{\varphi} + d_1 \circ \hat{\varphi}_{-\xi-\pi}|_{[0,1]}$ und $\hat{T} \circ \hat{\varphi}_{-\xi}|_{[0,1]}$ homotop, also gilt auch $d_1 \circ \hat{\varphi}_{-\xi-\pi}(1) = \hat{T} \circ \hat{\varphi}_{-\xi}(1)$.
Hieraus und wegen $\hat{T} \circ d_0 = d_1 \circ \hat{T}$ (man vergleiche hierzu (2.18)) gilt dann mit
$u\left(\hat{z}, \hat{t}\right) := \exp\left(\gamma z t\right) \varpi(-\alpha_0^*\left(p\right), -\alpha_1^*\left(p\right), -\gamma, \hat{t})\left(t_{01} y\right)\left(\tau_*\left(p\right), \hat{t}\right)$, $\left(\hat{z}, \hat{t}\right) \in \widehat{\Omega}^2$:

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\hat{T} \circ S_0^{-\xi}} - \int_{d_1 \circ S_1^{-\xi-\pi}}\right) u(\hat{z}, \cdot) \\
= \ &\left(-\int_{\hat{T} \circ \hat{\varphi}_{-\xi}} + \int_{d_1 \circ \hat{\varphi}_{-\xi-\pi}} + \int_{\hat{T} \circ \hat{\vartheta}_0} - \int_{d_1 \circ \hat{\vartheta}_1} + \int_{\hat{T} \circ d_0 \circ \hat{\varphi}_{-\xi}} - \int_{d_1^2 \circ \hat{\varphi}_{-\xi-\pi}}\right) u(\hat{z}, \cdot) \\
= \ &\left(-\int_{\hat{\varphi}} + \int_{\hat{T} \circ \hat{\vartheta}_0} - \int_{d_1 \circ \hat{\vartheta}_1} + \int_{d_1 \circ \hat{\varphi}}\right) u(\hat{z}, \cdot) \\
= \ &\left(-\int_{\hat{\vartheta}_1|_{[t_0,1]}} + \int_{\hat{T} \circ \hat{\vartheta}_0} - \int_{d_1 \circ \hat{\vartheta}_1} + \int_{d_1 \circ \hat{\vartheta}_1|_{[t_0,1]}}\right) u(\hat{z}, \cdot) \\
= \ &\left(-\int_{\hat{\vartheta}_1|_{[t_0,1]}} + \int_{\hat{T} \circ \hat{\vartheta}_0} - \int_{d_1 \circ \hat{\vartheta}_1|_{[0,t_0]}}\right) u(\hat{z}, \cdot).
\end{aligned}$$

Mit $\hat{\vartheta}_1(t_0) = \hat{\omega}_- = \hat{T}\left(\hat{\omega}_+\right) = \hat{T} \circ \hat{\vartheta}_0(0)$, $\hat{\vartheta}_1(1) = d_1\left(\hat{\omega}_+\right) = d_1 \circ \hat{\vartheta}_1(0)$ und
$d_1 \circ \hat{\vartheta}_1(t_0) = d_1\left(\hat{\omega}_-\right) = d_1 \circ \hat{T}\left(\hat{\omega}_+\right) = \hat{T} \circ d_0\left(\hat{\omega}_+\right) = \hat{T} \circ \hat{\vartheta}_0(1)$ folgt:

$$\int_{\hat{T} \circ S_0^{-\xi}} u(\hat{z}, \cdot) = \int_{d_1 \circ S_1^{-\xi-\pi}} u(\hat{z}, \cdot) = \int_{S_1^{-\xi-\pi}} u\left(\hat{z}, d_1(\cdot)\right). \tag{4.16}$$

Wegen $\left(1 - d_1(\hat{t})\right)^{-\alpha_1^*(p)} = \exp\left(-2\pi i \alpha_1^*(p)\right)\left(1 - \hat{t}\right)^{-\alpha_1^*(p)}$, $\hat{t} \in \widehat{\Omega}$ folgt dann die erste Behauptung aus i).

Wir zeigen nun ii):
Sei $\xi \in \mathbb{R}$, $l = 0, 1$, $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ und

$$\begin{aligned}\hat{T}\left(\hat{z}\right) \in & \hat{H}_{\xi - \arg(\delta_{-\pi}(\hat{\gamma}))+\pi} = \hat{H}_{\xi-\arg(\hat{\gamma})+2\pi} \\ & = \left\{ \hat{z} \in \widehat{\Omega}_\infty^+ \middle| \xi - \arg\left(\hat{\gamma}\right) + \frac{3\pi}{2} < \arg_0\left(\hat{z}\right), \arg_1\left(\hat{z}\right) < \xi - \arg\left(\hat{\gamma}\right) + \frac{5\pi}{2} \right\}.\end{aligned}$$

Aus (2.17) folgt $\arg_1\left(\hat{z}\right) - \pi = \arg_0\left(\hat{T}(\hat{z})\right)$, $\hat{z} \in \widehat{\Omega}$ und damit

$$\arg_1\left(\hat{T}\left(\hat{z}\right)\right) - \pi = \arg_0\left(\hat{T} \circ \hat{T}(\hat{z})\right) = \arg_0\left(\hat{z}\right), \ \hat{z} \in \widehat{\Omega}.$$

Zudem wurde in (2.18) $\hat{T}\left(\widehat{\Omega}_\infty^+\right) = \widehat{\Omega}_\infty^-$ und $d_1^{-1}\left(\widehat{\Omega}_\infty^-\right) = \hat{T}\left(\widehat{\Omega}_\infty^-\right) = \widehat{\Omega}_\infty^+$ gezeigt. Somit gilt:

$$\begin{aligned} & \hat{T}(\hat{z}) \in \hat{H}_{\xi-\arg(\hat{\gamma})+2\pi} \\ \Leftrightarrow \quad & \hat{z} \in \hat{T}\left(\widehat{\Omega}_\infty^+\right) = \widehat{\Omega}_\infty^-, \ \arg_1\left(\hat{z}\right) \in \left]\xi - \arg\left(\hat{\gamma}\right) + \frac{5\pi}{2}, \xi - \arg\left(\hat{\gamma}\right) + \frac{7\pi}{2}\right[\\ & \text{und } \arg_0\left(\hat{z}\right) \in \left]\xi + \pi - \arg\left(\hat{\gamma}\right) - \frac{\pi}{2}, \xi + \pi - \arg\left(\hat{\gamma}\right) + \frac{\pi}{2}\right[\\ \Leftrightarrow \quad & d_1^{-1}\left(\hat{z}\right) \in \widehat{\Omega}_\infty^+, \ \arg_1\left(d_1^{-1}\left(\hat{z}\right)\right) \in \left]\xi + \pi - \arg\left(\hat{\gamma}\right) - \frac{\pi}{2}, \xi + \pi - \arg\left(\hat{\gamma}\right) + \frac{\pi}{2}\right[\\ & \text{und } \arg_0\left(d_1^{-1}\left(\hat{z}\right)\right) \in \left]\xi + \pi - \arg\left(\hat{\gamma}\right) - \frac{\pi}{2}, \xi + \pi - \arg\left(\hat{\gamma}\right) + \frac{\pi}{2}\right[\\ \Leftrightarrow \quad & d_1^{-1}\left(\hat{z}\right) \in \hat{H}_{\xi+\pi-\arg(\hat{\gamma})}.\end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}(t_{01}\mathcal{L}_l y)(p, \hat{z}) &= (\mathcal{L}_l y)\left(\tau_{01}(p), \hat{T}(\hat{z})\right) \\ &= \int_{S_l^{-\xi}} \exp\left(-\gamma(1-z)P(\cdot)\right) \varpi(-\alpha_0^*\left(\tau_{01}(p)\right), -\alpha_1^*\left(\tau_{01}(p)\right), \gamma, \cdot) y\left(\tau_*\left(\tau_{01}(p)\right), \cdot\right) \\ &= \int_{S_l^{-\xi}} \exp\left(\gamma(z-1)P(\cdot)\right) \varpi(-\alpha_0^*\left(p\right), -\alpha_1^*\left(p\right), \gamma, \cdot) y\left(\tau_\infty^{-1} \circ \tau_*(p), \cdot\right) \\ &= \int_{S_l^{-\xi}} \exp\left(\gamma z P(\cdot)\right) \varpi(-\alpha_0^*\left(p\right), -\alpha_1^*\left(p\right), -\gamma, \cdot) \left(t_\infty^{-1} y\right)\left(\tau_*(p), \cdot\right).\end{aligned}$$

Damit folgt die erste Behauptung aus ii).
Die zweite Behauptung aus ii) folgt indem man die erste Behauptung hintereinander anwendet und dabei $\phi_0^{-1} \circ t_{01} = t_{01} \circ \phi_1^{-1}$ berücksichtigt.
Nun werden die beiden anderen Behauptungen aus i) bewiesen. Man verwende die erste Aussage aus i) indem man y durch $t_{01}^{-1}\phi_1^{-1}y$ ersetzt. Dann folgt aus $\left(t_\infty^{-1}\mathcal{L}_0 t_{01}^{-1}\phi_1^{-1}y\right)(p, \cdot) = -\exp\left(-2\pi i\alpha_1^*(p) + \gamma\right)\left(\mathcal{L}_1 y\right)(p, \cdot)$ die Gleichung $\left(t_\infty^{-2}\mathcal{L}_0 t_{01}^{-1}\phi_1^{-1}y\right)(p, \cdot) = -\exp\left(-2\pi i\alpha_1^*(\tau_\infty^{-1}(p)) - \gamma\right)\left(t_\infty^{-1}\mathcal{L}_1 y\right)(p, \cdot)$ und damit $\left(t_\infty^{-1}\mathcal{L}_1 y\right)(p, \cdot) = -\exp\left(2\pi i\alpha_0^*(p) + \gamma\right)\left(t_\infty^{-2}\mathcal{L}_0 t_{01}^{-1}\phi_1^{-1}y\right)(p, \cdot)$.

Verwendet man $t_{01} \circ \phi_1^{-1} = \phi_0^{-1} \circ t_{01}$, $t_{01}^2 = t_\infty^{-2}$ und die zweite Aussage in ii) folgt

$$\begin{aligned}\left(t_\infty^{-2}\mathcal{L}_0 t_{01}^{-1}\phi_1^{-1}y\right)(p,\cdot) &= \left(t_{01}^{2}\mathcal{L}_0 t_{01}^{-1}\phi_1^{-1}y\right)(p,\cdot) = \left(\phi_\infty^{-1}\mathcal{L}_0 t_\infty^{-2} t_{01}^{-1}\phi_1^{-1}y\right)(p,\cdot) \\ &= \left(\phi_\infty^{-1}\mathcal{L}_0 \phi_0^{-1} t_{01} y\right)(p,\cdot)\end{aligned}$$

und damit die zweite Behauptung aus i).
Die dritte Behauptung aus i) folgt sofort aus der zweiten Aussage aus ii) und $t_{01}^2 = t_\infty^{-2}$ (siehe (4.6)). □

Die Wronski Determinante; Das [.,.] Symbol

Wir führen nun die Wronski Determinante wie folgt ein:

(4.17) Bemerkung, Definition:

Sei $p \in \Lambda$ *und* $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{F}\left(\Lambda \times \widehat{\Omega}\right)$ *mit* $\eta_1(p,\cdot), \eta_2(p,\cdot) \in \mathcal{H}\left(\widehat{\Omega}\right)$.
Wir definieren die Wronski-Determinante von $\eta_1(p,\cdot), \eta_2(p,\cdot)$ *durch*

$$\omega(\eta_1,\eta_2)(p,\cdot) := \eta_1(p,\cdot)\,\eta_2'(p,\cdot) - \eta_1'(p,\cdot)\,\eta_2(p,\cdot).$$

Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$. *Im Fall* $\eta_1(p,\cdot), \eta_2(p,\cdot) \in Kern\,(L(p))$ *gilt:*

i) Es existiert genau eine Konstante $[\eta_1,\eta_2](p) \in \mathbb{C}$ *mit*

$$\omega(\eta_1,\eta_2)(p,\hat{z}) = \hat{z}^{\alpha_0-1}(1-\hat{z})^{\alpha_1-1}\exp(\gamma z)\,[\eta_1,\eta_2](p), \quad \hat{z} \in \widehat{\Omega}.$$

ii) $[.,.](p) : Kern\,(L(p)) \times Kern\,(L(p)) \to \mathbb{C}$ *ist ein alternierendes bilineares Funktional.*
Zudem gilt: $\eta_1(p,\cdot), \eta_2(p,\cdot)$ *bilden ein Fundamentalsystem von* $L(p)\eta = 0$ *genau dann wenn* $[\eta_1,\eta_2](p) \neq 0$.

iii) Für $\eta \in \mathcal{F}\left(\Lambda \times \widehat{\Omega}\right)$ *mit* $\eta(p,\cdot) \in Kern\,(L(p))$ *gilt:*

$$[\eta_1,\eta_2](p)\eta(p,\cdot) = [\eta,\eta_2](p)\eta_1(p,\cdot) + [\eta_1,\eta](p)\eta_2(p,\cdot). \tag{4.18}$$

Beweis:
Zu i): Für $\eta_1(p,\cdot), \eta_2(p,\cdot) \in \text{Kern}\,(L(p))$ ist $\omega(\eta_1,\eta_2)(p,\cdot)$ Lösung von

$$w' = \left[\frac{\alpha_0 - 1}{z} + \frac{\alpha_1 - 1}{z-1} + \gamma\right] w.$$

Es gilt somit $\omega(\eta_1,\eta_2)(p,\hat{z}) = \hat{z}^{\alpha_0-1}(1-\hat{z})^{\alpha_1-1}\exp(\gamma z)\cdot C$, wobei C eine Konstante ist. Wir definieren dann $[\eta_1,\eta_2](p) := C$.
Zu ii): Da $\omega(\cdot,\cdot)(p,\hat{z})$ $(\hat{z} \in \widehat{\Omega})$ bilinear und alternierend ist, so folgt dies auch für

$$[.,.](p) : \text{Kern}\,(L(p)) \times \text{Kern}\,(L(p)) \to \mathbb{C}.$$

Die zweite Aussage folgt sofort mit i).
Zu iii): Seien $\eta_1(p,\cdot),\eta_2(p,\cdot)$ linear abhängig.
Es existiere o.E. ein $\xi\in\mathbb{C}$ mit $\eta_1(p,\cdot)=\xi\eta_2(p,\cdot)$. Mit ii) gilt dann:

$$\begin{aligned}[\eta_1,\eta_2](p)\eta(p,\cdot)=0&=\xi\eta_2(p,\cdot)([\eta,\eta_2](p)-[\eta,\eta_2](p))\\&=\xi\eta_2(p,\cdot)[\eta_2,\eta](p)+\xi\eta_2(p,\cdot)[\eta_2,\eta](p)\\&=[\eta,\eta_2](p)\xi\eta_2(p,\cdot)+[\xi\eta_2,\eta](p)\eta_2(p,\cdot).\end{aligned}$$

Seien nun $\eta_1(p,\cdot),\eta_2(p,\cdot)$ linear unabhängig.
Dann existieren $\xi_1,\xi_2\in\mathbb{C}$ mit $\eta(p,\cdot)=\xi_1\eta_1(p,\cdot)+\xi_2\eta_2(p,\cdot)$, und damit gilt:

$$\begin{aligned}[\eta_1,\eta_2](p)\eta(p,\cdot)&=[\eta_1,\eta_2](p)(\xi_1\eta_1(p,\cdot)+\xi_2\eta_2(p,\cdot))\\&=\xi_1[\eta_1,\eta_2](p)\eta_1(p,\cdot)+\xi_2[\eta_1,\eta_2](p)\eta_2(p,\cdot)\\&\overset{ii)}{=}[\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2,\eta_2](p)\eta_1(p,\cdot)+[\eta_1,\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2](p)\eta_2(p,\cdot)\\&=[\eta,\eta_2](p)\eta_1(p,\cdot)+[\eta_1,\eta](p)\eta_2(p,\cdot).\end{aligned}$$

□

(4.19) Bemerkung:
Seien $\eta_1,\eta_2\in\mathcal{F}\left(\Lambda\times\widehat{\Omega}\right)$, $p=(\alpha_0,\beta_0,\alpha_1,\beta_1,\hat{\gamma})\in\Lambda$ *und* $\tilde{p}\in\Lambda$,
mit $\eta_j\,(p,\cdot)\in Kern\,(L\,(p))$ *und* $\eta_j\,(\tilde{p},\cdot)\in Kern\,(L\,(\tilde{p}))$, $(j=1,2)$. *Dann folgt:*

- *i) Ist* $\tilde{p}=\tau_0(p)$, *so gilt* $[t_0\eta_1,t_0\eta_2](p)=[\eta_1,\eta_2]\,(\tilde{p})$.
- *ii) Ist* $\tilde{p}=\tau_1(p)$, *so gilt* $[t_1\eta_1,t_1\eta_2](p)=[\eta_1,\eta_2]\,(\tilde{p})$.
- *iii) Ist* $\tilde{p}=\tau_{01}(p)$, *so gilt* $[t_{01}\eta_1,t_{01}\eta_2](p)=-\exp\left(-\gamma\right)[\eta_1,\eta_2]\,(\tilde{p})$.
- *iv) Ist* $\tilde{p}=\tau_\infty(p)$, *so gilt* $[t_\infty\eta_1,t_\infty\eta_2](p)=[\eta_1,\eta_2]\,(\tilde{p})$.

Beweis: Sei $\hat{z}\in\widehat{\Omega}$.
Wir zeigen die Aussage in i):

$$\begin{aligned}\omega\left(t_0\eta_1,t_0\eta_2\right)(p,\hat{z})=&\det\begin{pmatrix}\hat{z}^{\alpha_0}\eta_1(\tau_0(p),\hat{z}) & \hat{z}^{\alpha_0}\eta_2(\tau_0(p),\hat{z})\\ \alpha_0\hat{z}^{\alpha_0-1}\eta_1(\tau_0(p),\hat{z}) & \alpha_0\hat{z}^{\alpha_0-1}\eta_2(\tau_0(p),\hat{z})\end{pmatrix}\\&+\det\begin{pmatrix}\hat{z}^{\alpha_0}\eta_1(\tau_0(p),\hat{z}) & \hat{z}^{\alpha_0}\eta_2(\tau_0(p),\hat{z})\\ \hat{z}^{\alpha_0}\eta_1'(\tau_0(p),\hat{z}) & \hat{z}^{\alpha_0}\eta_2'(\tau_0(p),\hat{z})\end{pmatrix}\\=&\hat{z}^{2\alpha_0}\omega\left(\eta_1,\eta_2\right)(\tau_0(p),\hat{z})\\=&\hat{z}^{2\alpha_0}\hat{z}^{-\alpha_0-1}(1-\hat{z})^{\alpha_1-1}\exp\left(\gamma z\right)[\eta_1,\eta_2]\left(\tau_0(p)\right).\end{aligned}$$

Die Aussagen in ii) und in iv) lassen sich auf analoge Weise zeigen.
Wir zeigen die Aussage in iii):

$$
\begin{aligned}
\omega\left(t_{01}\eta_1, t_{01}\eta_2\right)(p, \hat{z}) &= \det \begin{pmatrix} \eta_1\left(\tau_{01}(p), \hat{T}(\hat{z})\right) & \eta_2\left(\tau_{01}(p), \hat{T}(\hat{z})\right) \\ -\eta_1'\left(\tau_{01}(p), \hat{T}(\hat{z})\right) & -\eta_2'\left(\tau_{01}(p), \hat{T}(\hat{z})\right) \end{pmatrix} \\
&= -\omega\left(\eta_1, \eta_2\right)\left(\tau_{01}(p), \hat{T}\left(\hat{z}\right)\right) \\
&= -\hat{T}\left(\hat{z}\right)^{\alpha_1-1}\left(1-\hat{T}\left(\hat{z}\right)\right)^{\alpha_0-1}\exp\left(-\gamma P\left(\hat{T}(\hat{z})\right)\right)[\eta_1, \eta_2](\tau_{01}(p)) \\
&= (1-\hat{z})^{\alpha_1-1}\,\hat{z}^{\alpha_0-1}\exp\left(\gamma z\right)\Big(-\exp\left(-\gamma\right)[\eta_1, \eta_2](\tau_{01}(p))\Big).
\end{aligned}
$$

$\square$

5 Spezielle Lösungen der konfluenten Heunschen Differentialgleichung

In diesem Kapitel führen wir mit Hilfe einer Funktion $\Phi \in \mathcal{F}\left(\Lambda \times \widehat{\Omega}\right)$ und den vorangegangenen Transformationen Fundamentalsysteme von Frobeniuslösungen bei den einfachen Singularitäten 0 und 1 ein, sowie ein Fundamentalsystem von Lösungen mit Asymptotik in ∞.

5.1 Zu den Frobeniuslösungen

(5.1) Satz: *Es gibt genau eine stetige partiell holomorphe Funktion*

$$\Phi : \Lambda \times \widehat{\Omega} \to \mathbb{C},$$

mit $\Phi(p,\cdot) \in Kern(L(p))$ *für alle* $p \in \Lambda$, *so dass* $\Phi \circ \left(id_\Lambda, \left(P|_{\widehat{\Omega}_0}\right)^{-1}\right)$ *eine stetige und partiell holomorphe Fortsetzung* $\tilde{\Phi} : \Lambda \times \mathbb{C}\backslash[1,\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ *hat, mit*

$$\tilde{\Phi}(\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}, 0) = \frac{1}{\Gamma}(1-\alpha_0).$$

Es gilt:

$$\tilde{\Phi}(p,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(p)}{\Gamma(1-\alpha_0+n)} z^n, \;\; |z|<1, \;\; p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda,$$

wobei die $a_n(p)$ *für* $n \in \mathbb{N}^*$ *die Rekursion*

$$\begin{aligned} na_n(p) - \left[(n-1)(n-\alpha_0-\alpha_1+\gamma) + \frac{1}{2}(1-\alpha_0)(\gamma+1-\alpha_1) - \beta_0\right] a_{n-1}(p) \qquad (5.2) \\ + \left[\beta_0+\beta_1-\gamma(n-1-\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1))\right](\alpha_0+1-n)a_{n-2}(p) = 0, \end{aligned}$$

erfüllen, mit $a_0 := 1$ *und* $a_{-1} := 0$.

Beweis: Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$. Wir setzen zuerst $\alpha_0 \notin \mathbb{N}^*$ voraus.
Da 0 eine einfache Singularität der *CHE* (1.5) ist, folgt aus der allgemeinen Theorie unter der Voraussetzung $\alpha_0 \notin \mathbb{N}^*$:
$\dot{\exists}\, \eta(p,\cdot) : \mathbb{C}\backslash[1,\infty[\to \mathbb{C}$ Lösung von (1.5) mit $\eta(p,0) = \frac{1}{\Gamma}(1-\alpha_0)$. Wir entwickeln dann $\eta(p,\cdot)$ in eine Potenzreihe um 0

$$\eta(p,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n(p) z^n; \;\; |z|<1.$$

Nun rechnen wir die Dreiterm-Rekursion (5.2) für $a_n(p) := \Gamma(1-\alpha_0+n)\cdot\tilde{a}_n(p)$ nach. Dazu stellen wir die Differentialgleichung (1.5) mit Hilfe des Operators $D := z\frac{d}{dz}$ dar, um folgende Eigenschaft des Operators zu nutzen:

$$Dz^n = nz^n \text{ für } n \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

Die Differentialgleichung (1.5) lässt sich mit D wie folgt aufschreiben :

$$\begin{aligned} &D\left(\alpha_0 - D\right)\eta \\ &+ z\left(D^2 + (1-\alpha_0-\alpha_1+\gamma)D + [\frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1) - \beta_0 + \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_0)]\right)\eta \\ &+ z^2\left(-\gamma D + (\beta_0+\beta_1 - \frac{1}{2}\gamma(2-\alpha_0-\alpha_1))\right)\eta = 0. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Mit (5.3) gilt also für $|z| < 1$:

$$\begin{aligned} &D(\alpha_0 - D)\eta(z) = \sum_0^\infty n(\alpha_0 - n)\tilde{a}_n(p)z^n, \\ &z\left(D^2 + (1-\alpha_0-\alpha_1+\gamma)D + \frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1) - \beta_0 + \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_0)\right)\eta(z) \\ &= \sum_{n=1}^\infty \Bigg((n-1)^2 + (1-\alpha_0-\alpha_1+\gamma)(n-1) \\ &\qquad\qquad + \frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1) - \beta_0 + \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_0)\Bigg)\tilde{a}_{n-1}(p)z^n, \\ &z^2\left(-\gamma D + (\beta_0+\beta_1 - \frac{1}{2}\gamma(2-\alpha_0-\alpha_1))\right)\eta(z) \\ &= \sum_2^\infty \left(-\gamma(n-2) + (\beta_0+\beta_1-\frac{1}{2}\gamma(2-\alpha_0-\alpha_1))\right)\tilde{a}_{n-2}(p)z^n. \end{aligned}$$

Somit erfüllen die a_n für $n \geq 2$ die Gleichungen:

$$\begin{aligned} &- n(n-\alpha_0)\tilde{a}_n(p) \\ &+ \left[(n-1)(n-\alpha_0-\alpha_1+\gamma) + \frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1) - \beta_0 + \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_0)\right]\tilde{a}_{n-1}(p) \\ &+ \left[\beta_0+\beta_1-\gamma\left(n-1-\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}\right)\right]\tilde{a}_{n-2}(p) = 0 \end{aligned} \tag{5.5}$$

sowie:

$$(\alpha_0 - 1)\tilde{a}_1(p) + \left[\frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1) - \beta_0 + \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_0)\right]\tilde{a}_0(p) = 0.$$

Um die Rekursion (5.2) für die $a_n(p)$ zu erhalten, setzen wir $\tilde{a}_{-1}(p) := 0$ und multiplizieren die Gleichung (5.5) mit $\Gamma(n-\alpha_0)$.
Die $a_n(p)$ erfüllen damit (5.2) für $\alpha_0 \notin \mathbb{N}^*$.
Die Rekursion (5.2) ist aber auch für den Fall $\alpha_0 \in \mathbb{N}^*$ eindeutig lösbar.

Seien nun $a_n : \Lambda \longrightarrow \mathbb{C}$, $(n \in \mathbb{N} \cup \{-1\})$ die durch $a_{-1} = 0$, $a_0 = 1$ und der Rekursion (5.2) eindeutig definierten stetigen Funktionen.
Wir zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma})}{\Gamma(1-\alpha_0+n)} z^n \text{ für } (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}, z) \in \Lambda \times K_1(0)$$

lokal gleichmäßig konvergiert.
Seien $K \subset \Lambda$ kompakt, $p \in K$, $n \in \mathbb{N}^*$, und $f_1(p,n)$ und $f_2(p,n)$ durch

$$(5.2) \Leftrightarrow: n a_n(p) + f_1(p,n) a_{n-1}(p) + f_2(p,n) a_{n-2}(p) = 0$$

eindeutig bestimmt.
Dann existiert ein $c_1 > 0$, so dass für alle $(\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in K$ gilt:

$$\begin{aligned} |f_1(p,n)| &= \left|(n-1)(n-\alpha_0-\alpha_1+\gamma) + \frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1) - \beta_0 + \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_0)\right| \\ &\leq (n-1)(n+|-\alpha_0-\alpha_1+\gamma|) + \left|\frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1) - \beta_0 + \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_0)\right| \\ &\leq (n-1)(n+c_1) + c_1 \overset{c_1 \leq n+c_1}{\leq} n(n+c_1) \end{aligned}$$

und ein $c_2 > 0$, so dass für alle $(\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in K$ gilt:

$$\begin{aligned} |f_2(p,n)| &= \left|\left(\beta_0 + \beta_1 - \gamma(n-1-\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1))\right)(\alpha_0+1-n)\right| \\ &\leq \left(|\beta_0+\beta_1| + |\gamma|\left(n + \left|-1-\frac{1}{2}(\alpha_0+\alpha_1)\right|\right)\right)(|\alpha_0+1|+n) \\ &\leq (c_2 + c_2(n+c_2))(n+c_2) \leq (c_2+1)(n+(c_2+1))^2. \end{aligned}$$

Setzen wir $c := \max(c_1, c_2+1)$ und $A_n := \max\{|a_n(p)| \mid p \in K\}$ so folgt:

$$n A_n \leq n(n+c) A_{n-1} + c(n+c)^2 A_{n-2}. \tag{5.6}$$

Sei nun $K_0 := \max\{|1-\alpha_0| \mid (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in K\}$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > K_0$.
Dann gilt für $(\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in K$

$$\mathrm{Re}(1-\alpha_0+n_0) = n_0 + \mathrm{Re}(1-\alpha_0) \geq n_0 - K_0 > 0$$

und mit einem $C > \max\left\{\frac{1}{|\Gamma(1-\alpha_0+n_0)|}\,|\,(\alpha_0,\beta_0,\alpha_1,\beta_1,\hat{\gamma})\in K\right\}$ erhält man dann

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\Gamma(1-\alpha_0+n)|} &= \frac{1}{|\Gamma(1-\alpha_0+n_0)|}\cdot\frac{1}{|(n_0+1-\alpha_0)\cdot\ldots\cdot(n-\alpha_0)|}\\ &\leq C\frac{1}{(n_0-|1-\alpha_0|)\cdot\ldots\cdot(n-1-|1-\alpha_0|)}\\ &\leq C\cdot\frac{1}{(n_0-K_0)\cdot\ldots\cdot(n-1-K_0)},\quad n\geq n_0.\end{aligned}$$

Damit erfüllen die $B_n := \max\left\{\frac{A_m}{(n_0-K_0)\cdot\ldots\cdot(m-1-K_0)}\middle|\, n_0\leq m\leq n\right\}$ $(n_0<n)$ für $p=(\alpha_0,\beta_0,\alpha_1,\beta_1,\hat{\gamma})\in K$:

$$\frac{1}{C}\left|\frac{a_n(p)}{\Gamma(1-\alpha_0+n)}\right| \leq \frac{A_n}{(n_0-K_0)\cdot\ldots\cdot(n-1-K_0)}\leq B_n,$$

und somit gilt für $|z|\leq r<1$:

$$\sum_{n=0}^{n}\frac{|a_n(p)|}{|\Gamma(1-\alpha_0+n)|}|z|^n \leq \sum_{n=0}^{n_0}\frac{|a_n(p)|}{|\Gamma(1-\alpha_0+n)|}|z|^n + C\sum_{n=n_0+1}^{n}B_n r^n.$$

Für alle $n\geq n_0$ erhalten wir mit Hilfe von (5.6)

$$\begin{aligned}\frac{nA_n}{(n_0-K_0)\cdot\ldots\cdot(n-1-K_0)} &\leq \frac{n(n+c)}{(n-1-K_0)}\cdot\frac{A_{n-1}}{(n_0-K_0)\cdot\ldots\cdot(n-2-K_0)}\\ &\quad+\frac{c(n+c)^2}{(n-2-K_0)(n-1-K_0)}\cdot\frac{A_{n-2}}{(n_0-K_0)\cdot\ldots\cdot(n-3-K_0)}\end{aligned}$$

und somit

$$nB_n \leq \left(\frac{n(n+c)}{(n-1-K_0)}+\frac{c(n+c)^2}{(n-2-K_0)(n-1-K_0)}\right)B_{n-1}.$$

Aufgrund von

$$\frac{B_n r^n}{B_{n-1}r^{n-1}} \leq \left(\frac{(n+c)}{(n-1-K_0)}+\frac{c(n+c)^2}{n(n-2-K_0)(n-1-K_0)}\right)r\longrightarrow r<1,$$

für $n\to\infty$ folgt $\sum_{n=n_0+1}^{\infty}B_n r^n<\infty$, also konvergiert die Reihe in (5.6) gleichmäßig auf $K\times\overline{K}_r(0)$.
Hieraus schließen wir die partielle Holomorphie von $\tilde{\Phi}|_{\Lambda\times K_1(0)}$.
Nun gilt mit $p=(\alpha_0,\beta_0,\alpha_1,\beta_1,\hat{\gamma})\in\Lambda$ im Fall $\alpha_0\notin\mathbb{N}^*$: $\tilde{\Phi}\,(p,\cdot)=\eta(p,)|_{K_1(0)}$.
Aufgrund der Stetigkeit von $\tilde{\Phi}$ und deren partieller Ableitungen (siehe (2.4)4.) ist $\tilde{\Phi}\,(p,\cdot)$ dann auch Lösung der *CHE* (1.5) im Fall $\alpha_0\in\mathbb{N}^*$.
Die analytische Fortsetzung von $\tilde{\Phi}(p,\cdot)$ auf $\mathbb{C}\backslash[1,\infty[$ bezeichnen wir ebenfalls mit $\tilde{\Phi}(p,\cdot)$

und mit $\Phi(p,\cdot) \in \operatorname{Kern}(L(p))$ bezeichnen wir die analytische Fortsetzung von $\tilde{\Phi}(p,\cdot)$ bei $\hat{\omega}_0$.
In bekannter Weise folgt die partielle Holomorphie der Funktionen Φ und $\tilde{\Phi}$. $\square$

Seien $(y_1, y_2) \in \mathcal{F}\left(\Lambda \times \widehat{\Omega}\right) \times \mathcal{F}\left(\Lambda \times \widehat{\Omega}\right)$ und $t \in \mathcal{G}$ wie in (4.6) definiert.
Wir verwenden dann folgende Kurzschreibweise: $t\,(y_1, y_2) := (ty_1, ty_2)$.

(5.7) Bemerkung, Definition:
Für $(p, \hat{z}) \in \Lambda \times \widehat{\Omega}$ bezeichnen wir

$$\mathcal{F}_0\,(p, \hat{z}) := (\Phi\,(p, \hat{z})\,, (t_0\Phi)\,(p, \hat{z})) \ \ \textit{und}\ \mathcal{F}_1\,(p, \hat{z}) := t_{01}\mathcal{F}_0\,(p, \hat{z})\,.$$

Es gilt dann für $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ mit $[\cdot,\cdot]$ aus (4.17):

i) $[\Phi, t_0\Phi](p) = \frac{\sin(\pi\alpha_0)}{\pi}$. *Damit ist $\mathcal{F}_0\,(p,\cdot)$ ein Fundamentalsystem aus Frobeniuslösungen von $L(p)\eta = 0$ genau dann, wenn $\alpha_0 \notin \mathbb{Z}$.*

ii) $[t_{01}\Phi, t_{01}t_0\Phi](p) = -\exp(-\gamma)\,\frac{\sin(\pi\alpha_1)}{\pi}$. *Damit ist $\mathcal{F}_1\,(p,\cdot)$ ein Fundamentalsystem aus Frobeniuslösungen von $L(p)\eta = 0$ genau dann, wenn $\alpha_1 \notin \mathbb{Z}$.*

Beweis:
Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$.
Aufgrund von (4.19) bleibt nur $[\Phi, t_0\Phi](p) = \frac{\sin(\pi\alpha_0)}{\pi}$ zu zeigen.
Für $\hat{z} \in \widehat{\Omega}_0$ gilt:

$$\begin{aligned}
& \exp\left((\alpha_0 - 1)\operatorname{Ln}(z)\right)\exp\left((\alpha_1 - 1)\operatorname{Ln}(1 - z)\right)\exp\left(\gamma z\right)[\Phi, t_0\Phi](p) \\
= \;& \hat{z}^{\alpha_0 - 1}(1 - \hat{z})^{\alpha_1 - 1}\exp\left(\gamma z\right)[\Phi, t_0\Phi](p) = \omega\left(\Phi, t_0\Phi\right)(p, \hat{z}) \\
= \;& \exp\left((\alpha_0 - 1)\operatorname{Ln}(z)\right)\det\begin{pmatrix} \tilde{\Phi}(p, z) & z\tilde{\Phi}(\tau_0(p), z) \\ \tilde{\Phi}(p, z) & \alpha_0\tilde{\Phi}(\tau_0(p), z) + z\tilde{\Phi}(\tau_0(p), z) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Teilt man die obere Gleichung durch $\exp\left((\alpha_0 - 1)\operatorname{Ln}(z)\right)$ und betrachtet den Grenzwert für $z \to 0$ so erhält man, aufgrund von $\tau_0(p) = (-\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma})$:

$$\begin{aligned}
[\Phi, t_0\Phi] \;&=\; \tilde{\Phi}(\tilde{p}, 0)\cdot\alpha_0\cdot\tilde{\Phi}(\tau_0(\tilde{p}), 0) \\
&=\; \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_0)}\cdot\alpha_0\cdot\frac{1}{\Gamma(1 + \alpha_0)} = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_0)\Gamma(\alpha_0)} = \frac{\sin(\pi\alpha_0)}{\pi}.
\end{aligned}$$

$\square$

Für die Differentialgleichung $L(p)\eta = 0$, $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ mit

$$\alpha_0 \in \mathbb{Z} \quad \text{beziehungsweise} \quad \alpha_1 \in \mathbb{Z}$$

geben wir nun noch Fundamentalsysteme von Frobeniuslösungen bei 0 beziehungsweise 1 an, die im allgemeinen nicht Logarithmus-frei sind.

Es ist uns gelungen eine stetige und partiell holomorphe Funktion $\check{\Phi} \in \mathcal{F}\left(\Lambda \times \widehat{\Omega}\right)$ anzugeben, so dass $\left(\Phi(p,\cdot), \check{\Phi}(p,\cdot)\right)$ für $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$, bis auf den Ausnahmefall $\alpha_0 \in \mathbb{N}^*$, ein Fundamentalsystem von $L(p)\eta = 0$ bildet. Dabei wird $\check{\Phi}$ wiederum mit Hilfe von Φ erzeugt.
Setzt man $\alpha_0 \notin (-\mathbb{N}^*)$ voraus, so ist $\left(t_0\Phi(p,\cdot), t_0\check{\Phi}(p,\cdot)\right)$ ein Fundamentalsystem von $L(p)\eta = 0$.
Mit Zuhilfenahme der Transformation t_{01} erhält man dann Analoges für die Fundamentalsysteme bei 1.

(5.8) Satz:
Sei $\Gamma_\Phi : (\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})) \times \mathbb{C}^3 \times \widehat{\mathbb{C}^*} \to \mathbb{C}$ *für* $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in (\mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})) \times \mathbb{C}^3 \times \widehat{\mathbb{C}^*}$ *durch*

$$\Gamma_\Phi(p) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n(\tau_0(p))}{\Gamma(1+\alpha_0+n)2^{n+\alpha_0}} \frac{1}{n+\alpha_0} \tag{5.9}$$

definiert. Diese Funktion kann man für $\mathrm{Re}(\alpha_0) > 0$ *wie folgt darstellen:*

$$\Gamma_\Phi(p) = \int_0^{\frac{1}{2}} \tilde{\Phi}(\tau_0(p), -z) z^{\alpha_0 - 1} dz, \tag{5.10}$$

woraus man die Stetigkeit und partielle Holomorphie abliest.
Hiermit sei $\check{\Phi} : \mathbb{C}^*\backslash(-\mathbb{N}) \times \mathbb{C}^4 \times \widehat{\Omega} \to \mathbb{C}$ *durch*

$$\check{\Phi}(p, \hat{z}) := \Gamma(\alpha_0)\left(t_0\Phi\right)(p, \hat{z}) - \Gamma_\Phi(p)\Phi(p, \hat{z}) \tag{5.11}$$

definiert.
$\check{\Phi}$ *lässt sich auf ganz* $\Lambda \times \widehat{\Omega}$ *stetig und partiell holomorph fortsetzen.*
Die Fortsetzung bezeichnen wir wiederum mit $\check{\Phi} : \Lambda \times \widehat{\Omega} \to \mathbb{C}$.
Es gilt $\check{\Phi}(p,\cdot) \in Kern\,(L(p))$ *für alle* $p \in \Lambda$.

Beweis: Für $K \subset \mathbb{C}^*\backslash(-\mathbb{N}) \times \mathbb{C}^3 \times \widehat{\mathbb{C}^*}$ kompakt existiert ein $k > 0$ mit:

$$\left|\frac{1}{n+\alpha_0}\right| < k \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in K.$$

Mit den Abschätzungen aus dem Beweis von Satz (5.1) folgt dann die lokal gleichmäßige Konvergenz der Reihe aus (5.9) für $p \in \mathbb{C}^*\backslash(-\mathbb{N}) \times \mathbb{C}^3 \times \widehat{\mathbb{C}^*}$ und somit die Stetigkeit und partielle Holomorphie von $\Gamma_\Phi : \mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N}) \times \mathbb{C}^3 \times \widehat{\mathbb{C}^*} \to \mathbb{C}$.
Sei nun $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \mathbb{C}^*\backslash(-\mathbb{N}) \times \mathbb{C}^3 \times \widehat{\mathbb{C}^*}$.
Unter der Voraussetzung $\mathrm{Re}(\alpha_0) > 0$ existiert das uneigentliche Integral (5.10) und mit (5.1) folgt

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \tilde{\Phi}(\tau_0(p), -z) z^{\alpha_0 - 1} dz &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n(\tau_0(p))}{\Gamma(1+\alpha_0+n)} \int_0^{\frac{1}{2}} z^{n+\alpha_0-1} dz \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n(\tau_0(p))}{\Gamma(1+\alpha_0+n)2^{n+\alpha_0}} \frac{1}{n+\alpha_0} = \Gamma_\Phi(p).
\end{aligned}$$

Da $\check{\Phi}(p,\cdot)$ eine Linearkombination von $\Phi(p,\cdot)$ und $(t_0\Phi)(p,\cdot)$ ist, gilt $\check{\Phi}(p,\cdot) \in \operatorname{Kern}(L(p))$.
Nun zeigen wir, dass $\check{\Phi}$ eine stetige und partiell holomorphe Fortsetzung auf ganz $\Lambda \times \widehat{\Omega}$ hat.
Sei im folgenden $\hat{z} \in \widehat{\Omega}$, $m \in \mathbb{N}$ und $\tilde{p} := (\beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \mathbb{C}^3 \times \widehat{\mathbb{C}^*}$.
Die Γ-Funktion und $\Gamma_\Phi(\cdot,\tilde{p})$ haben bei $-m \in -\mathbb{N}$ einfache Pole mit

$$\operatorname{Res}(\Gamma, -m) = \frac{(-1)^m}{m!}; \quad \operatorname{Res}(\Gamma_\Phi(\cdot,\tilde{p}), -m) = (-1)^m a_m(m,\tilde{p}). \tag{5.12}$$

Somit hat $\check{\Phi}$ bezüglich der ersten Komponente bei $\alpha_0 = -m \in -\mathbb{N}$ höchstens einen einfachen Pol mit:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\check{\Phi}(\cdot,\tilde{p},\hat{z}), -m\right) = \operatorname{Res}(\Gamma,-m)\,(t_0\Phi)(-m,\tilde{p},\hat{z}) \\ - \operatorname{Res}(\Gamma_\Phi(\cdot,\tilde{p}),-m)\Phi(\cdot,\tilde{p},\hat{z}). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Da $\mathcal{F}_0(p)$ für $\alpha_0 = -m$ kein Fundamentalsystem ist (siehe (5.7)) und $\Phi(-m,\tilde{p},\cdot) \neq 0$ existiert ein $\xi \in \mathbb{C}$ mit

$$(t_0\Phi)(-m,\beta_0,\alpha_1,\beta_1,\hat{\gamma},\hat{z}) = \xi \cdot \Phi(-m,\beta_0,\alpha_1,\beta_1,\hat{\gamma},\hat{z}), \quad \hat{z} \in \widehat{\Omega}. \tag{5.14}$$

Aufgrund von (5.1) gilt daher für $\hat{z} \in \widehat{\Omega}_0 \cap P^{-1}(]0,1[)$:

$$\begin{aligned} \xi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(-m,\beta_0,\alpha_1,\beta_1,\hat{\gamma})}{\Gamma(1+m+n)} z^n &= \xi \cdot \Phi(-m,\beta_0,\alpha_1,\beta_1,\hat{\gamma},\hat{z}) \\ &= (t_0\Phi)(-m,\beta_0,\alpha_1,\beta_1,\hat{\gamma},\hat{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(m,\beta_0,\alpha_1,\beta_1,\hat{\gamma})}{\Gamma(1-m+n)} z^{n-m} \\ &= \sum_{n=-m}^{\infty} \frac{a_{n+m}(m,\beta_0,\alpha_1,\beta_1,\hat{\gamma})}{\Gamma(n+1)} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+m}(m,\beta_0,\alpha_1,\beta_1,\hat{\gamma})}{n!} z^n. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Mit $z \to 0$ in (5.15) folgt

$$\xi = m! a_m(m,\beta_0,\alpha_1,\beta_1,\gamma) \tag{5.16}$$

und mit (5.12), (5.13) und (5.16) dann $\operatorname{Res}(\check{\Phi}(\cdot,\tilde{p},\hat{z}), -m) = 0$. Damit ist $\check{\Phi}(\cdot,\tilde{p},\hat{z})$ auf $\mathbb{C}$ holomorph fortsetzbar. Die partielle Holomorphie von $\check{\Phi}(-m,\cdot)$ folgt aus der Darstellung in (5.18). Damit ist $\check{\Phi}$ partiell holomorph und damit stetig und erfüllt daher $\check{\Phi}(p,\cdot) \in \operatorname{Kern}(L(p))$, $p \in \Lambda$. □

(5.17) Bemerkung:
Für $(p,\hat{z}) \in \Lambda \times \widehat{\Omega}$ *bezeichnen wir* $\check{\mathcal{F}}_0(p,\hat{z}) := \left(\Phi(p,\hat{z}), \check{\Phi}(p,\hat{z})\right)$.
Es gilt dann für $p = (\alpha_0,\beta_0,\alpha_1,\beta_1,\hat{\gamma}) \in \Lambda$:

i) $[\Phi,\check{\Phi}](p) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_0)}$. *Damit ist* $\check{\mathcal{F}}_0(p,\cdot)$ *ein Fundamentalsystem von* $L(p)\eta = 0$ *genau dann, wenn* $\alpha_0 \notin \mathbb{N}^*$.

ii) $[t_0\Phi, t_0\check{\Phi}](p) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha_0)}$. *Damit ist* $t_0\check{\mathcal{F}}_0(p,\cdot)$ *ein Fundamentalsystem von* $L(p)\eta = 0$ *genau dann, wenn* $\alpha_0 \notin (-\mathbb{N}^*)$.

iii) $[t_{01}\Phi, t_{01}\check{\Phi}](p) = -\exp(-\gamma)\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)}$. *Damit ist* $t_{01}\check{\mathcal{F}}_0(p,\cdot)$ *ein Fundamentalsystem von* $L(p)\eta = 0$ *genau dann, wenn* $\alpha_1 \notin \mathbb{N}^*$.

iv) $[t_1t_{01}\Phi, t_1t_{01}\check{\Phi}](p) = -\exp(-\gamma)\frac{1}{\Gamma(1+\alpha_1)}$. *Damit ist* $t_1t_{01}\check{\mathcal{F}}_0(p,\cdot)$ *ein Fundamentalsystem von* $L(p)\eta = 0$ *genau dann, wenn* $\alpha_1 \notin (-\mathbb{N}^*)$.

v) Im Fall $\alpha_0 = 0$ *gilt* $\check{\mathcal{F}}_0(p,\cdot) = t_0\check{\mathcal{F}}_0(p,\cdot)$.

Beweis: Da v) sofort folgt, ist aufgrund von (4.19) nur noch i) zu zeigen.
Die Aussage in i) gilt da:

$$\begin{aligned}[\Phi,\check{\Phi}](p) &\overset{(4.17)3.}{=} \Gamma(\alpha_0)[\Phi,t_0\Phi](p) - \Gamma_\Phi(p)[\Phi,\Phi](p)\\ &\overset{(4.17)2.}{=} \Gamma(\alpha_0)[\Phi,t_0\Phi](p) \overset{(5.7)1.}{=} \Gamma(\alpha_0)\frac{\sin(\pi\alpha_0)}{\pi} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_0)}.\end{aligned}$$

□

(5.18) Bemerkung:
Sei $p = (\alpha_0,\beta_0,\alpha_1,\beta_1,\hat{\gamma}) \in \Lambda$ *mit* $\alpha_0 = -m$, $m \in \mathbb{N}$, *und* $\hat{z} \in \widehat{\Omega}$. *Dann gilt:*

$$\check{\Phi}(p,\hat{z}) = (-1)^m a_m(p)\,\Phi(p,\hat{z})\ln_0(\hat{z}) + z^{-m}h(p,\hat{z}),$$

mit

$$\begin{aligned}h(p,\hat{z}) :=&\ \frac{(-1)^{m+1}}{m!}(\partial_1\Phi)(p,\hat{z}) + (-1)^{m+1}z^m a_m(p)(\partial_1\Phi)(p,\hat{z})\\ &+\Bigg(\sum_{\substack{n=0\\ n\neq m}}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-m}\left(\frac{m!a_m(p)}{n!} - \frac{a_n(p)}{\Gamma(1-m+n)2^{n-m}}\right) + (-1)^m a_m(p)(Ln(2)+C)\\ &\qquad\qquad +m!a_m(p)\int_1^\infty e^{-t}t^{-m-1}dt\Bigg)z^m\Phi(p,\hat{z}),\end{aligned}$$

wobei C *die Eulersche Konstante bezeichnet.*
Beweis:
Sei $\tilde{p} := (\beta_0,\alpha_1,\beta_1,\hat{\gamma}) \in \mathbb{C}^3\times\widehat{\mathbb{C}^*}$ und $\hat{z} \in \widehat{\Omega}$. Dann gilt für $\tilde{\alpha_0} \in \mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$

$$\check{\Phi}(\tilde{\alpha_0},\tilde{p},\hat{z}) = \Gamma(\tilde{\alpha_0})(\tilde{\alpha_0}+m)g(\tilde{\alpha_0},\tilde{p},\hat{z}) + \mu(\tilde{\alpha_0},\tilde{p})\,\Phi(\tilde{\alpha_0},\tilde{p},\hat{z}),$$

mit $\mu(\tilde{\alpha_0},\tilde{p}) := \Gamma(\tilde{\alpha_0})m!a_m(m,\tilde{p}) - \Gamma_\Phi(\tilde{\alpha_0},\tilde{p})$ und

$$g\left(\tilde{\alpha_0},\tilde{p},\hat{z}\right) := \frac{1}{(\tilde{\alpha_0}+m)}\left(\left(t_0\Phi\right)\left(\tilde{\alpha_0},\tilde{p},\hat{z}\right) - m!a_m(m,\tilde{p})\Phi(\tilde{\alpha_0},\tilde{p},\hat{z})\right).$$

Für die nun folgenden Grenzwertberechnungen setzen wir $\tilde{\alpha_0} \in \mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})$ voraus. Aufgrund von $\lim\limits_{\tilde{\alpha_0}\to -m} \Gamma(\tilde{\alpha_0})(\tilde{\alpha_0}+m) = \frac{(-1)^m}{m!}$ und $\lim\limits_{\tilde{\alpha_0}\to -m} \Phi(\tilde{\alpha_0},\tilde{p},\hat{z}) = \Phi(-m,\tilde{p},\hat{z})$ sind nun noch die Grenzwerte $\lim\limits_{\tilde{\alpha_0}\to -m} g(\tilde{\alpha_0},\tilde{p},\hat{z})$ und $\lim\limits_{\tilde{\alpha_0}\to -m} \mu(\tilde{\alpha_0},\tilde{p})$ zu berechnen.
Mit $\xi := m!a_m(m,\tilde{p})$ gilt wegen (5.14) und (5.16):

$$\begin{aligned}
&\lim_{\tilde{\alpha_0}\to -m} g(\tilde{\alpha_0},\tilde{p},\hat{z}) = \lim_{\tilde{\alpha_0}\to -m} \frac{1}{\tilde{\alpha_0}+m}\left(\left(t_0\Phi\right)\left(\tilde{\alpha_0},\tilde{p},\hat{z}\right) - \xi\Phi\left(\tilde{\alpha_0},\tilde{p},\hat{z}\right)\right)\\
= \quad & \lim_{\tilde{\alpha_0}\to -m} \frac{\left(t_0\Phi\right)\left(\tilde{\alpha_0},\tilde{p},\hat{z}\right) - \left(t_0\Phi\right)\left(-m,\tilde{p},\hat{z}\right)}{\tilde{\alpha_0}+m} + \lim_{\tilde{\alpha_0}\to -m} \frac{\xi\Phi(-m,\tilde{p},\hat{z}) - \xi\Phi(\tilde{\alpha_0},\tilde{p},\hat{z})}{\tilde{\alpha_0}+m}\\
= \quad & \left(\partial_1(t_0\Phi)\right)\left(-m,\tilde{p},\hat{z}\right) - \xi\left(\partial_1\Phi\right)\left(-m,\tilde{p},\hat{z}\right)\\
= \quad & \ln_0(\hat{z})\left(t_0\Phi\right)\left(-m,\tilde{p},\hat{z}\right) + z^{-m}\left(\partial_1\Phi\right)\left(-\cdot,\tilde{p},\hat{z}\right)(-m) - \xi\left(\partial_1\Phi\right)\left(-m,\tilde{p},\hat{z}\right)\\
= \quad & z^{-m}\left(-\left(\partial_1\Phi\right)\left(m,\tilde{p},\hat{z}\right) - z^m\xi\left(\partial_1\Phi\right)\left(-m,\tilde{p},\hat{z}\right)\right) + \ln_0(\hat{z})\xi\Phi(-m,\tilde{p},\hat{z}).
\end{aligned}$$

Um $\lim\limits_{\tilde{\alpha_0}\to -m} \mu(\tilde{\alpha_0},\tilde{p})$ zu berechnen, benutzen wir folgende Darstellung der Γ-Funktion:

$$z \in \mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N}) : \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{n+z} + \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt.$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\mu(\tilde{\alpha_0},\tilde{p}) = \sum_{n=0}^{\infty}&\left(\frac{(-1)^n m!a_m(m,\tilde{p})}{n!}\frac{1}{n+\tilde{\alpha_0}} - \frac{(-1)^n a_n(m,\tilde{p})}{\Gamma(1+\tilde{\alpha_0}+n)2^{n+\tilde{\alpha_0}}}\frac{1}{n+\tilde{\alpha_0}}\right)\\
&+\xi\int_1^\infty e^{-t}t^{\tilde{\alpha_0}-1}dt \quad (\tilde{\alpha_0} \in \mathbb{C}\backslash(-\mathbb{N})),
\end{aligned}$$

und hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
\lim_{\tilde{\alpha_0}\to -m} \mu(\tilde{\alpha_0},\tilde{p}) \quad = \quad & \sum_{\substack{n=0\\ n\neq m}}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n m!a_m(m,\tilde{p})}{n!}\frac{1}{n-m} - \frac{(-1)^n a_n(m,\tilde{p})}{\Gamma(1-m+n)2^{n-m}}\frac{1}{n-m}\right)\\
&+(-1)^m a_m(m,\tilde{p})\lim_{\tilde{\alpha_0}\to -m}\frac{1}{\tilde{\alpha_0}+m}\left(1 - \frac{1}{2^{m+\tilde{\alpha_0}}\Gamma(1+\tilde{\alpha_0}+m)}\right)\\
&+\xi\int_1^\infty e^{-t}t^{-m-1}dt.
\end{aligned}$$

Aufgrund von

$$\begin{aligned}
&\lim_{\tilde{\alpha_0}\to -m}\frac{1}{\tilde{\alpha_0}+m}\left(1 - \frac{1}{2^{m+\tilde{\alpha_0}}\Gamma(1+\tilde{\alpha_0}+m)}\right) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2^z\Gamma(1+z)}\right)(0)\\
= \quad & \left(\frac{1}{2^z\Gamma^2(1+z)}\Gamma'(1+z) + 2^{-z}\ln(2)\frac{1}{\Gamma(1+z)}\right)(0) = \ln(2) - \Gamma'(1)\\
= \quad & \mathrm{Ln}(2) + C,
\end{aligned}$$

wobei C die Eulerkonstante ist, folgt dann die Behauptung. $\square$

Wir untersuchen nun das Transformationsverhalten von $\mathcal{F}_0$ und $\mathcal{F}_1$ bezüglich t_0, t_1, t_∞.

(5.19) Bemerkung(Transformationseigenschaft):
Mit $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ und $\hat{z} \in \widehat{\Omega}$ gilt:

i) $t_1 \mathcal{F}_0 (p, \hat{z}) = \mathcal{F}_0 (p, \hat{z}), \quad t_0 \mathcal{F}_1 (p, \hat{z}) = \mathcal{F}_1 (p, \hat{z})$,

ii) $t_\infty \mathcal{F}_0 (p, \hat{z}) = \mathcal{F}_0 (p, \hat{z})$ *und* $t_\infty \mathcal{F}_1 (p, \hat{z}) = \exp (\gamma) \mathcal{F}_1 (p, \hat{z})$.

Beweis:
Sei $(\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$.
Zu i): Wir zeigen zuerst: $t_1 \Phi = \Phi$.
Für $\hat{z} \in \widehat{\Omega}_0$ gilt:

$$(t_1 \Phi) (p, \hat{z}) = (1 - \hat{z})^{\alpha_1} \Phi(\tau_1(p), \hat{z}) = \exp (\alpha_1 \mathrm{Ln}(1 - z)) \tilde{\Phi}(\tau_1(p), z).$$

Aus $\tau_1 (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) = (\alpha_0, \beta_0, -\alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma})$ folgt:

$$\tilde{\Phi}(\tau_1(p), 0) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_0)} = \tilde{\Phi}(p, 0),$$

und über die Eindeutigkeit in (5.1), damit $t_1 \Phi = \Phi$.
Mit(4.6)iii) folgt $t_1 t_0 \Phi = t_0 t_1 \Phi = t_0 \Phi$ und somit $t_1 \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0$.
Aufgrund von $\mathcal{F}_1 = t_{01} \mathcal{F}_0$ gilt dann $t_0 \mathcal{F}_1 = t_0 t_{01} \mathcal{F}_0 = t_{01} t_1 \mathcal{F}_0 = t_{01} \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_1$.
Zu ii): Wir zeigen zuerst: $t_\infty \Phi = \Phi$.
Für $\hat{z} \in \widehat{\Omega}_0$ gilt:

$$(t_\infty \Phi) (p, \hat{z}) = \exp(\gamma z) \Phi(\tau_\infty(p), \hat{z}) = \exp(\gamma z) \tilde{\Phi}(\tau_\infty(p), z).$$

Aus $\tau_\infty (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \delta_\pi (\hat{\gamma}))$ folgt:

$$\tilde{\Phi}(\tau_\infty(p), 0) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_0)} = \tilde{\Phi}(p, 0)$$

und über die Eindeutigkeit in (5.1) damit $t_\infty \Phi = \Phi$.
Mit(4.6)i) folgt $t_\infty t_0 \Phi = t_0 t_\infty \Phi = t_0 \Phi$ und somit $t_\infty \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0$. Aufgrund von (4.6)ii) folgt die Behauptung für $\mathcal{F}_1$. $\square$

Nun untersuchen wir das Verhalten der Funktionen a_n aus (5.1) bezüglich einiger Parametertransformationen.

(5.20) Bemerkung: *Für die a_n, $n \in \mathbb{N}$ aus Satz (5.1) gilt:*

$$a_n \circ \tau_* = a_n.$$

Beweis:
Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$. Für $n = 0$ gilt $a_0(p) = 1 = a_0 \circ \tau_*(p)$.
Wir zeigen nun, dass $(a_n(p))_n$ und $(a_n \circ \tau_*(p))_n$ dieselbe Rekursion (5.2)erfüllen.
Es gilt:

$$\begin{aligned}\left(\beta_0 + \beta_1 - \gamma\left(n - 1 - \frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_1)\right)\right) &= \gamma\left(\frac{\beta_0 + \beta_1}{\gamma} - n + 1 + \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2}\right) \\ &= \gamma(\alpha_0^*(p) + 1 - n).\end{aligned}$$

Mit (4.7) und (4.8) folgt $\gamma = \gamma^*(p)$, $\alpha_0^*(\tau_*(p)) = \alpha_0$ und somit

$$\gamma\left(\alpha_0^*(p) + 1 - n\right)\left(\alpha_0 + 1 - n\right) = \gamma^*(p)\left(\alpha_0^*\left(\tau_*(p)\right) + 1 - n\right)\left(\alpha_0^*(p) + 1 - n\right).$$

Aufgrund von (4.8)2a) folgt:

$$(n-1)(n - \alpha_0 - \alpha_1 - \gamma) = (n-1)\left(n - \alpha_0^*(p) - \alpha_1^*(p) - \gamma^*(p)\right)$$

und mit (4.8)2c) gilt:

$$\frac{1}{2}(1 - \alpha_0)(\gamma + 1 - \alpha_1) - \beta_0 = \frac{1}{2}(\gamma^*(p) + 1 - \alpha_0^*(p))(1 - \alpha_1^*(p)) - \beta_0^*(p).$$

Damit folgt die Behauptung. □

Aus (5.19) folgern wir sofort:
(5.21) Bemerkung:
Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$. Die $a_n : \Lambda \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ aus Satz (5.1) erfüllen:

i) $a_n\left(\tau_\infty(p)\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(n+1-\alpha_0-k)_k}{k!} \gamma^k a_{n-k}(p) \quad (n \in \mathbb{N}).$

ii) $a_n(\tau_1(p)) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n + 1 - \alpha_0 - k)_k \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ k \end{pmatrix} a_{n-k}(p) \quad (n \in \mathbb{N}).$

5.2 Lösungen mit Asymptotik

(5.22) Satz,Definition:
Es existiert genau eine stetige und partiell holomorphe Funktion

$$\Psi : \Lambda \times \widehat{\Omega} \longrightarrow \mathbb{C},$$

so dass für alle $p \in \Lambda$ gilt:

1. $\Psi(p, \cdot) \in Kern(L(p))$,

2. $2i \sin(\alpha_0^*(p)\pi)\Psi(p, \cdot) = \exp\left(2\pi i \alpha_0^*(p)\right)\left(\mathcal{L}_0\Phi\right)(p, \cdot)$,

3. $\Psi(p,\cdot)$ *erfüllt folgende Asymptotik:*

$$\Psi(p,\hat{z}) \sim \hat{\gamma}^{\alpha_0^*(p)-1}\hat{z}^{\alpha_0^*(p)-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n\left(\tau_\infty\circ\tau_1\circ\tau_*(p)\right)(\gamma z)^{-n}$$

für $z\to\infty$ *mit* $\hat{z}\in\{\hat{z}\in\widehat{\Omega}_\infty^+ | -\frac{3\pi}{2}<\arg(\hat{\gamma})+\arg_0(\hat{z})<\frac{3\pi}{2}\}$ *und*

$$\Psi(p,\hat{z}) \sim \hat{\gamma}^{\alpha_0^*(p)-1}(\hat{z}-1)^{\alpha_0^*(p)-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n\left(\tau_1\circ\tau_*(p)\right)(\gamma(z-1))^{-n}$$

für $(z-1)\to\infty$ *mit* $\hat{z}\in\{\hat{z}\in\widehat{\Omega}_\infty^+ | -\frac{3\pi}{2}<\arg(\hat{\gamma})+\arg_1(\hat{z})<\frac{3\pi}{2}\}$. *Dabei sind die* a_n *aus (5.1).*

Zu bemerken ist noch, dass Ψ schon durch eine der asymptotischen Reihen in 3. und durch 1. eindeutig bestimmt ist. Diese Aussage folgt aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Für den Beweis von (5.22) benötigen wir folgende Bemerkung:

(5.23) Bemerkung, Definition:

Sei $\theta_0 : [0,1[\ni t\to\omega_+\cdot(1-t)\in\Omega$ *und* $\hat{\theta}_0 : [0,1[\ni t\to\widehat{\Omega}$ *die Liftung von* θ_0 *mit* $\hat{\theta}_0(0)=\hat{\omega}_+$. *Weiter seien* ϑ_0 *und* $\hat{\vartheta}_0$ *aus (2.2).*

Für $p\in\Lambda$ *mit* $\operatorname{Re}(\alpha_0^*(p))<1$ *und* $h : K_1(0)\to\mathbb{C}$ *holomorph gilt:*

$$\left(\int_{\hat{\vartheta}_0}+\left(\exp\left(-2\pi i\alpha_0^*(p)\right)-1\right)\int_{\hat{\theta}_0}\right)(\cdot)^{-\alpha_0^*(p)}h\left(P(\cdot)\right)=0.$$

Beweis von (5.23):

Sei $p=(\alpha_0,\beta_0,\alpha_1,\beta_1,\hat{\gamma})\in\Lambda$ mit $\operatorname{Re}(\alpha_0^*(p))<1$. Wir bezeichnen mit Z die Zusammenhangskomponente von $P^{-1}(K_1(0))$ mit $\hat{\omega}_0\in Z$.

Mit $0<\varepsilon<1$ bezeichnen wir $\vartheta_\varepsilon(t):=\varepsilon\vartheta_0(t)$ $(t\in[0,1])$ und mit $\hat{\vartheta}_\varepsilon : [0,1]\to\widehat{\Omega}$ die Liftung von ϑ_ε mit $\hat{\vartheta}_\varepsilon(0)=\hat{\theta}_0(1-\varepsilon)$.

Da die Kurven ϑ_0 und $\left(\theta_0|_{[0,1-\varepsilon]}+\vartheta_\varepsilon\right)-\theta_0|_{[0,1-\varepsilon]}$ in Ω homotop sind (wobei mit $-\theta_0|_{[0,1-\varepsilon]}$ die zu $\theta_0|_{[0,1-\varepsilon]}$ entgegengesetzte Kurve und mit $+$ die übliche Verknüpfung von Kurven gemeint ist), so sind auch ihre Liftungen $\hat{\vartheta}_0$ und $\left(\hat{\theta}_0|_{[0,1-\varepsilon]}+\hat{\vartheta}_\varepsilon\right)-d_0\circ\hat{\theta}_0|_{[0,1-\varepsilon]}$ homotop, und damit gilt:

$$\int_{\hat{\vartheta}_0}u=\int_{\hat{\theta}_0|_{[0,1-\varepsilon[}}u+\int_{\hat{\vartheta}_\varepsilon}u-\int_{d_0\circ\hat{\theta}_0|_{[0,1-\varepsilon[}}u=\left(1-\exp\left(-2\pi i\alpha_0^*(p)\right)\right)\int_{\hat{\theta}_0|_{[0,1-\varepsilon[}}u+\int_{\hat{\vartheta}_\varepsilon}u,$$

mit $u(\hat{t}):=\hat{t}^{-\alpha_0^*(p)}h\left(t\right)$ $(\hat{t}\in Z)$.

Da h holomorph ist, so gilt $\left|\int_{\hat{\vartheta}_\varepsilon}u(\hat{z},\cdot)\right|=\mathcal{O}\left(\varepsilon^{-\operatorname{Re}\left(\alpha_0^*(p)\right)+1}\right)$ $(\varepsilon\to 0)$. Aufgrund von $\operatorname{Re}(\alpha_0^*(p))<1$ folgt damit $\left|\int_{\hat{\vartheta}_\varepsilon}u(\hat{z},\cdot)\right|\to 0\quad(\varepsilon\to 0)$. $\square$

Beweis von (5.22):
Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$. Wir setzen zuerst $\alpha_0^*(p) \notin \mathbb{Z}$ voraus.
Dann definieren wir:

$$\Psi(p, \cdot) := \frac{\exp\left(2\pi i \alpha_0^*(p)\right)}{2i \sin(\alpha_0^*(p)\pi)} \left(\mathcal{L}_0 \Phi\right)(p, \cdot).$$

Da Φ stetig und partiell holomorph ist, gilt dies auch für $\mathcal{L}_0\Phi$ aufgrund von (4.10). Somit ist $\Psi : \{p \in \Lambda | \alpha_0^*(p) \notin \mathbb{Z}\} \times \widehat{\Omega} \to \mathbb{C}$ stetig und partiell holomorph.
Sei nun

$$u\left(p, \hat{z}, \hat{t}\right) := \exp\left(\gamma z t\right) \varpi\left(-\alpha_0^*(p), -\alpha_1^*(p), -\gamma, \hat{t}\right) \Phi\left(\tau_*(p), \hat{t}\right), \quad \hat{z}, \hat{t} \in \widehat{\Omega}.$$

Mit (3.4) und (5.19) folgt

$$\begin{aligned} u\left(p, \hat{z}, \hat{t}\right) &= \exp\left(\gamma(z-1)t\right) \hat{t}^{-\alpha_0^*(p)} \left(1 - \hat{t}\right)^{-\alpha_1^*(p)} \Phi(\tau_*(p), \hat{t}) \\ &= \exp\left(\gamma(z-1)t\right) \hat{t}^{-\alpha_0^*(p)} \Phi(\tau_1 \circ \tau_*(p), \hat{t}) \qquad (5.24) \\ &= \exp\left(\gamma z t\right) \hat{t}^{-\alpha_0^*(p)} \Phi(\tau_\infty \circ \tau_1 \circ \tau_*(p), \hat{t}), \quad \hat{z}, \hat{t} \in \widehat{\Omega}. \qquad (5.25) \end{aligned}$$

Im Fall $\alpha_0^*(p) \notin \mathbb{Z}$ und $-\xi \in]0, 2\pi[$ gilt für $\hat{z} \in \hat{H}_{\xi+\pi-\arg(\hat{\gamma})}$ unter Berücksichtigung von (4.10), (5.25) und (5.1)

$$\begin{aligned} \Psi\left(p, \hat{z}\right) =& \frac{\exp\left(2\pi i \alpha_0^*(p)\right)}{2i \sin(\alpha_0^*(p)\pi)} \int\limits_{S_0^{-\xi}} u\left(p, \hat{z}, \cdot\right) \\ =& \frac{\exp\left(2\pi i \alpha_0^*(p)\right)\pi}{\sin(\alpha_0^*(p)\pi)} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\infty \exp(-i\xi)}^{(0+)} \exp(\gamma z t) t^{-\alpha_0^*(p)} \tilde{\Phi}(\tau_\infty \circ \tau_1 \circ \tau_*(p), t) dt. \end{aligned}$$

Die Potenzreihenentwicklung von $\tilde{\Phi}(\tau_\infty \circ \tau_1 \circ \tau_*(p), \cdot)$ bei 0 lässt sich mit (5.1) gewinnen. Ferner gilt:

$$\hat{z} \in \hat{H}_{\xi+\pi-\arg(\hat{\gamma})} \Rightarrow \frac{\pi}{2} > \left|\arg\left(\hat{\gamma}\right) + \arg_0(\hat{z}) - \xi - \pi\right| = \left|\arg\left(\delta_{-2\pi}\left(\hat{\gamma}\right)\right) + \arg_0(\hat{z}) - \xi + \pi\right|.$$

Wenden wir nun das *Lemma von Watson* aus [15], (Seite 55) an, so gilt mit einem $K_0 > 0$ groß genug:

$$\begin{aligned} \Psi\left(p, \hat{z}\right) \sim& \frac{\exp\left(2\pi i \alpha_0^*(p)\right)\pi}{\sin(\alpha_0^*(p)\pi)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m(\tau_\infty \circ \tau_1 \circ \tau_*(p))}{\Gamma(1 - \alpha_0^*(p) + m)\Gamma(\alpha_0^*(p) - m)}. \\ & \left(\delta_{-2\pi}\left(\hat{\gamma}\right)\right)^{\alpha_0^*(p)-1-m} \hat{z}^{\alpha_0^*(p)-1-m} \quad (z \to \infty), \end{aligned}$$

für $\hat{z} \in \hat{H}_{\xi+\pi-\arg(\hat{\gamma})}$ mit $\mathrm{Re}\,(\gamma z \exp(-i\xi)) < -K_0$.
Aufgrund von

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_0^*(p)+m)\Gamma(\alpha_0^*(p)-m)} = (-1)^m \frac{\sin(\pi\alpha_0^*(p))}{\pi}$$

und mit der üblichen Argumentation erhalten wir für $\hat{z} \in \hat{H}_{\xi+\pi-\arg(\hat{\gamma})}$:

$$\Psi(p,\hat{z}) \sim \hat{\gamma}^{\alpha_0^*(p)-1} \hat{z}^{\alpha_0^*(p)-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \left(\tau_\infty \circ \tau_1 \circ \tau_*(p)\right) (\gamma z)^{-n} \qquad (z \to \infty).$$

Da $-\xi \in]0, 2\pi[$ vorausgesetzt war, erhalten wir die erste Behauptung aus (5.22)3. (im Fall $\alpha_0^*(p) \notin \mathbb{Z}$). Auf analoge Weise zeigt man mit (5.24) die zweite Behauptung aus (5.22)3. (im Fall $\alpha_0^*(p) \notin \mathbb{Z}$).

Für $\alpha_0^*(p) \notin \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{Re}(\alpha_0^*(p)) < 1$ gilt wegen (5.23) und (5.1):

$$\begin{aligned}
\Psi(p,\hat{z}) &= \frac{\exp(2\pi i \alpha_0^*(p))}{2i\sin(\alpha_0^*(p)\pi)} \int_{S_0^{-\xi}} u(p,\hat{z},\cdot) \\
&= \exp(2\pi i \alpha_0^*(p)) \frac{\exp(-2\pi i \alpha_0^*(p)) - 1}{2i\sin(\alpha_0^*(p)\pi)} \left(-\int_{\hat{\theta}_0} + \int_{\hat{\varphi}_{-\xi}} \right) u(p,\hat{z},\cdot) \qquad (5.26) \\
&= -\exp(\pi i \alpha_0^*(p)) \left(-\int_{\hat{\theta}_0} + \int_{\hat{\varphi}_{-\xi}} \right) u(p,\hat{z},\cdot), \quad \xi \in \mathbb{R},\ \hat{z} \in \hat{H}_{\xi+\pi-\arg(\hat{\gamma})}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt in üblicher Weise die Existenz der partiell holomorphen Fortsetzung von Ψ auf $\{p \in \Lambda | \alpha_0^*(p) \notin \mathbb{N}^*\} \times \widehat{\Omega}$.
Ferner erhalten wir das asymptotische Verhalten aus (5.22)3. für den Fall $\alpha_0^*(p) \in -\mathbb{N}$, indem wir die Version des *Lemmas von Watson* aus [15] auf Seite 40 auf (5.26) (mit $\alpha_0^*(p) \in -\mathbb{N}$) anwenden.

Sei nun $\alpha_0^*(p) \notin \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{Re}(\alpha_0^*(p)) \geq 1$. Mit einem $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq \mathrm{Re}(\alpha_0^*(p))$ definieren wir

$$\Phi_1\left(p,\hat{t}\right) := \hat{t}^{-\alpha_0^*(p)} \Phi(\tau_\infty \circ \tau_1 \circ \tau_*(p), \hat{t}) - \sum_{n=0}^{m} \frac{a\left(\tau_\infty \circ \tau_1 \circ \tau_*(p)\right)}{\Gamma(n+1-\alpha_0^*(p))} \hat{t}^{n-\alpha_0^*(p)}, \quad \hat{t} \in \widehat{\Omega}.$$

Für $\xi \in \mathbb{R}$ und $\hat{z} \in \hat{H}_{\xi+\pi-\arg(\hat{\gamma})}$ gilt analog zum Beweis des *Lemmas von Watson* [15] (Seite 55) unter Berücksichtigung von (5.25), (5.1) und (5.23):

$$\Psi(p,\hat{z}) = I(p,\hat{z}) + \sum_{n=0}^{m} (-1)^n a_n \left(\tau_\infty \circ \tau_1 \circ \tau_*(p)\right) \hat{\gamma}^{\alpha_0^*(p)-1-n} \hat{z}^{\alpha_0^*(p)-1-n} \qquad (5.27)$$

mit:

$$I(p,\hat{z}) := \frac{\exp(2\pi i\alpha_0^*(p))}{2i\sin(\alpha_0^*(p)\pi)} \int\limits_{S_0^{-\xi}} \exp(\gamma z P(\cdot))\,\Phi_1(p,\cdot)$$

$$\overset{(5.23)}{=} -\exp(\pi i\alpha_0^*(p)) \left(-\int\limits_{\hat{\theta}_0} + \int\limits_{\hat{\varphi}_{-\xi}} \right) \exp(\gamma z P(\cdot))\,\Phi_1(p,\cdot) \qquad (\hat{z} \in \hat{H}_{\xi+\pi-\arg(\hat{\gamma})}).$$

Hieraus folgt, dass sich Ψ partiell holomorph auf $\Lambda \times \widehat{\Omega}$ fortsetzen lässt.
Im Fall $\alpha_0^*(p) \in \mathbb{N}^*$ erhält man mit dem *Lemma von Watson* auf Seite 40 und (5.27) die erste der beiden asymptotischen Reihen.
Auf analoge Weise erhält man mit (5.24) die zweite asymptotische Reihe. $\square$

Eine direkte Folgerung aus dem Beweis ist:

(5.28) Bemerkung:
*Seien $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ mit $\mathrm{Re}(\alpha_0^*(p)) < 1$, $\xi \in \mathbb{R}$ und $\hat{z} \in \hat{H}_{\xi+\pi-\arg(\hat{\gamma})}$.
Dann gilt mit der zusammengesetzten Kurve $L_0^{-\xi} := -\hat{\theta}_0 + \hat{\varphi}_{-\xi}$*

$$\Psi(p,\hat{z}) = -\exp(\pi i\alpha_0^*(p)) \int\limits_{L_0^{-\xi}} \exp(\gamma z P(\cdot))\,\varpi(-\alpha_0^*(p), -\alpha_1^*(p), -\gamma, \cdot)\,\Phi(\tau_*(p), \cdot),$$

wobei $\hat{\varphi}_{-\xi}$ in (4.9) und $\hat{\theta}_0$ in (5.23) definiert wurden.

(5.29) Satz:
Wir definieren die stetige und partiell holomorphe Funktion $\tilde{\Psi} : \Lambda \times \widehat{\Omega} \to \mathbb{C}$ durch

$$\tilde{\Psi}(p,\cdot) := \exp(i\pi(\alpha_1^*(p) - 1))\,(t_\infty^{-1}\Psi)(p,\cdot), \quad p \in \Lambda.$$

Für $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ gilt:

1. $2i\sin(\pi\alpha_1^*(p))\,\tilde{\Psi}(p,\cdot) = \exp(i\pi\alpha_1^*(p) + \gamma)\,(\mathcal{L}_1 t_{01}\Phi)(p,\cdot)$.
2. *$\tilde{\Psi}(p,\cdot)$ erfüllt die folgende Asymptotik:*

$$\tilde{\Psi}(p,\hat{z}) \sim \exp(\gamma z)\,\hat{\gamma}^{\alpha_1^*(p)-1}\hat{z}^{\alpha_1^*(p)-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\tau_\infty \circ \tau_0 \circ \tau_{01} \circ \tau_*(p))\,(\gamma z)^{-n},$$

für $z \to \infty$ mit $\hat{z} \in \{\hat{z} \in \widehat{\Omega}_\infty^+ | -\frac{\pi}{2} < \arg(\hat{\gamma}) + \arg_0(\hat{z}) < \frac{5\pi}{2}\}$ und

$$\tilde{\Psi}(p,\hat{z}) \sim \exp(\gamma z)\,\hat{\gamma}^{\alpha_1^*(p)-1}(\hat{z}-1)^{\alpha_1^*(p)-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\tau_0 \circ \tau_{01} \circ \tau_*(p))\,(\gamma(z-1))^{-n},$$

für $(z-1) \to \infty$ mit $\hat{z} \in \{\hat{z} \in \widehat{\Omega}_\infty^+ | -\frac{\pi}{2} < \arg(\hat{\gamma}) + \arg_1(\hat{z}) < \frac{5\pi}{2}\}$. Dabei sind die a_n aus (5.1).

Beweis:
Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$. In (5.22) haben wir $2i\sin(\alpha_0^*(p)\pi)\Psi(p,\cdot) = \exp\left(2\pi i\alpha_0^*(p)\right)\left(\mathcal{L}_0\Phi\right)(p,\cdot)$ definiert. Somit folgt

$$2i\sin(\alpha_0^*\left(\tau_\infty^{-1}(p)\right)\pi)\left(t_\infty^{-1}\Psi\right)(p,\cdot) = \exp\left(2\pi i\alpha_0^*\left(\tau_\infty^{-1}(p)\right)\right)\left(t_\infty^{-1}\mathcal{L}_0\Phi\right)(p,\cdot).$$

Aufgrund von $\tau_*\circ\tau_\infty^{-1}(p) = \tau_{01}\circ\tau_*$ (siehe (4.8.3a)) folgt $\alpha_0^*\left(\tau_\infty^{-1}(p)\right) = \alpha_1^*(p)$. Hiermit und mit (4.15) folgt dann

$$2i\sin(\alpha_1^*(p)\pi)\tilde{\Psi}(p,\cdot) = -\exp\left(i\pi(\alpha_1^*(p)-1)\right)\exp(\gamma)\left(\mathcal{L}_1\phi_1 t_{01}\Phi\right)(p,\cdot).$$

Da $\phi_1 t_{01}\Phi = t_{01}\Phi$, folgt dann

$$2i\sin(\alpha_1^*(p)\pi)\tilde{\Psi}(p,\cdot) = \exp\left(\gamma + \pi i\alpha_1^*(p)\right)\left(\mathcal{L}_1 t_{01}\Phi\right)(p,\cdot).$$

Die Asymptotik aus Satz (5.22) transformiert sich entsprechend, wenn man $\tau_*\circ\tau_\infty^{-1} = \tau_{01}\circ\tau_*$, $\left(\delta_{-\pi}(\hat{\gamma})\right)^{\alpha_1^*(p)-1} = \exp\left(-i\pi\left(\alpha_1^*(p)-1\right)\right)\hat{\gamma}^{\alpha_1^*(p)-1}$, sowie für $\hat{z}\in\widehat{\Omega}_\infty^+$

$$-\frac{3\pi}{2} < \arg\left(\delta_{-\pi}(\hat{\gamma})\right) + \arg_{0/1}(\hat{z}) < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \arg(\hat{\gamma}) + \arg_{0/1}(\hat{z}) < \frac{5\pi}{2}$$

berücksichtigt. □

(5.30) Bemerkung, Definition:
Für $(p,\hat{z})\in\Lambda\times\widehat{\Omega}$ *definieren wir* $\mathcal{F}_\infty(p,\hat{z}) := \left(\Psi(p,\hat{z}), \tilde{\Psi}(p,\hat{z})\right)$.
Für $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ *bildet* $\mathcal{F}_\infty(p,\cdot)$ *ein Fundamentalsystem von* $L(p)\eta = 0$, *mit*

$$[\Psi,\tilde{\Psi}](p) = -\exp(i\pi\alpha_1)\,\hat{\gamma}^{\alpha_0+\alpha_1-1}.$$

Beweis:
Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma) \in \Lambda$ und sei $\nu_0 := \alpha_0^*(p) - 1$ und $\nu_1 := \alpha_1^*(p) - 1$.
Für $\hat{z} \in \left\{\hat{z}\in\widehat{\Omega}_\infty^+ \middle| -\frac{\pi}{2} < \arg(\hat{\gamma}) + \arg_0(\hat{z}) < \frac{3\pi}{2}\right\} =: G$ gilt:

$$\Psi(p,\hat{z}) = \hat{\gamma}^{\nu_0}\hat{z}^{\nu_0}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right),\ \tilde{\Psi}(p,\hat{z}) = \exp(\gamma z)\,\hat{\gamma}^{\nu_1}\hat{z}^{\nu_1}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right),$$

$$\Psi'(p,\hat{z}) = \hat{\gamma}^{\nu_0}\hat{z}^{\nu_0}\cdot\mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right),\ \tilde{\Psi}'(p,\hat{z}) = \gamma\exp(\gamma z)\,\hat{\gamma}^{\nu_1}\hat{z}^{\nu_1}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right),$$

für $z\to\infty$, und damit

$$\begin{aligned}
\omega(\Psi,\tilde{\Psi})(p,\hat{z}) &= \det\begin{pmatrix}\Psi(p,\hat{z}) & \tilde{\Psi}(p,\hat{z})\\ \Psi'(p,\hat{z}) & \tilde{\Psi}'(p,\hat{z})\end{pmatrix}\\
&= \hat{\gamma}^{\nu_0+\nu_1}\hat{z}^{\nu_0+\nu_1}\exp(\gamma z)\det\begin{pmatrix}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right) & \left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right)\\ \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right) & \gamma\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right)\end{pmatrix}\\
&= \gamma\hat{\gamma}^{\nu_0+\nu_1}\hat{z}^{\nu_0+\nu_1}\exp(\gamma z)\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right)\\
&= \gamma\hat{\gamma}^{\nu_0+\nu_1}\hat{z}^{\nu_0+\nu_1}\exp(\gamma z)\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right), \quad \text{für } z\to\infty,\ \hat{z}\in G.
\end{aligned}$$

Aufgrund von (4.8)2a) gilt $\nu_0 + \nu_1 = \alpha_0^*(p) + \alpha_1^*(p) - 2 = \alpha_0 + \alpha_1 - 2$, und somit

$$\omega(\Psi, \tilde{\Psi})\,(p, \hat{z}) = \gamma\hat{\gamma}^{\alpha_0+\alpha_1-2}\hat{z}^{\alpha_0+\alpha_1-2}\exp\left(\gamma z\right)\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right) \tag{5.31}$$

für $z \to \infty$, $\hat{z} \in G$.
Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}\omega(\Psi, \tilde{\Psi})\,(p, \hat{z}) &= [\Psi, \tilde{\Psi}](p)\hat{z}^{\alpha_0-1}\,(1-\hat{z})^{\alpha_1-1}\exp\left(\gamma z\right) \\ &= [\Psi, \tilde{\Psi}]\,(p)\,\hat{z}^{\alpha_0-1}\,(\hat{z}-1)^{\alpha_1-1}\exp(\pi i\,(1-\alpha_1))\exp\left(\gamma z\right) \\ &= [\Psi, \tilde{\Psi}](p)\exp(\pi i\,(1-\alpha_1))\hat{z}^{\alpha_0+\alpha_1-2}\exp\left(\gamma z\right)\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right),\end{aligned} \tag{5.32}$$

für $z \to \infty$, $\hat{z} \in G$. Mit (5.31) und (5.32) folgt dann

$$[\Psi, \tilde{\Psi}](p) = \exp\left(i\pi(\alpha_1 - 1)\right)\hat{\gamma}^{\alpha_0+\alpha_1-1}.$$

□

(5.33) Bemerkung, Definition (Transformationseigenschaften):
Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$. Dann gilt:

i) $(t_0\mathcal{F}_\infty)\,(p,\cdot) = \hat{\gamma}^{-\alpha_0}\mathcal{F}_\infty(p,\cdot)$,

ii) $(t_1\mathcal{F}_\infty)\,(p,\cdot) = \exp\left(-i\pi\alpha_1\right)\hat{\gamma}^{-\alpha_1}\mathcal{F}_\infty(p,\cdot)$,

iii) $(t_\infty\mathcal{F}_\infty)\,(p,\cdot) = \mathcal{F}_\infty(p,\cdot) \circ Q_\infty(p)$
mit $Q_\infty := \begin{pmatrix} \tilde{q} & -\exp\left(i\pi\alpha_0^*\right) \\ -\exp\left(i\pi\alpha_1^*\right) & 0 \end{pmatrix}$ *und* $\tilde{q} : \Lambda \to \mathbb{C}$ *mit*

$$\tilde{q}(p) := \exp\left(i\pi(\alpha_1^*(p) - \alpha_1)\right)\hat{\gamma}^{-\alpha_0-\alpha_1+1}[t_\infty\Psi, t_\infty^{-1}\Psi](p), \tag{5.34}$$

iv) $(t_{01}\mathcal{F}_\infty)\,(p,\cdot) = \left(\phi_1^{-1}\mathcal{F}_\infty\right)(p,\cdot) \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\left(-\gamma\right) \end{pmatrix}$.

Beweis : Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$. Dann folgt für $j = 0, 1$:

$$\alpha_0^*\left(\tau_j(p)\right) = \alpha_0^*\left(p\right) - \alpha_j, \quad \alpha_1^*\left(\tau_j(p)\right) = \alpha_1^*(p) - \alpha_j.$$

Zu i): Aus der allgemeinen Theorie weiß man, dass die Lösung $\Psi(p,\cdot)$ von $L\,(p)\,y = 0$ durch das asymptotische Verhalten

$$\Psi\left(p, \hat{z}\right) = \gamma^{\alpha_0^*(p)-1}\hat{z}^{\alpha_0^*(p)-1}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right),\ (z \to \infty)$$

auf $M_1 := \left\{ \hat{z} \in \widehat{\Omega}^+_\infty | -\frac{3\pi}{2} < \arg(\hat{\gamma}) + \arg_0(\hat{z}) < \frac{3\pi}{2} \right\}$ eindeutig bestimmt ist.
$(t_0\Psi)(p,\cdot)$ hat folgendes asymptotische Verhalten für $\hat{z} \in M_1$:

$$(t_0\Psi)(p,\cdot) = \hat{\gamma}^{\alpha_0^*(p)-\alpha_0-1} \hat{z}^{\alpha_0} \hat{z}^{\alpha_0^*(p)-\alpha_0-1} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right), \ (z \to \infty),$$

und somit folgt $(t_0\Psi)(p,\cdot) = \hat{\gamma}^{-\alpha_0}\Psi(p,\cdot)$.
Aufgrund von (4.6)i) gilt $t_\infty \circ t_0 = t_0 \circ t_\infty$ und somit

$$\begin{aligned} \left(t_0\tilde{\Psi}\right)(p,\cdot) &= \exp\left(i\pi(\alpha_1^*(p) - \alpha_0 - 1)\right) \left(t_\infty^{-1} t_0 \Psi\right)(p,\cdot) \\ &= \exp\left(i\pi(\alpha_1^*(p) - \alpha_0 - 1)\right) (\delta_{-\pi}\hat{\gamma})^{-\alpha_0} \left(t_\infty^{-1}\Psi\right)(p,\cdot) = \hat{\gamma}^{-\alpha_0}\tilde{\Psi}(p,\cdot). \end{aligned}$$

Zu ii): Aus der allgemeinen Theorie weiß man, dass die Lösung $\Psi(p,\cdot)$ von $L(p)\,y = 0$ durch das asymptotische Verhalten

$$\Psi(p,\hat{z}) = \gamma^{\alpha_0^*(p)-1} (\hat{z}-1)^{\alpha_0^*(p)-1} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z-1}\right)\right), \ (z \to \infty)$$

auf $M_2 := \left\{ \hat{z} \in \widehat{\Omega}^+_\infty | -\frac{3\pi}{2} < \arg(\hat{\gamma}) + \arg_1(\hat{z}) < \frac{3\pi}{2} \right\}$ eindeutig bestimmt ist. $(t_1\Psi)(p,\cdot)$ hat folgendes asymptotische Verhalten für $\hat{z} \in M_2$:

$$(t_1\Psi)(p,\hat{z}) = \hat{\gamma}^{\alpha_0^*(p)-\alpha_1-1} (1-\hat{z})^{\alpha_1} (\hat{z}-1)^{\alpha_0^*(p)-\alpha_0-1} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z-1}\right)\right), \ (z \to \infty).$$

Hierbei folgt wegen $(1-\hat{z})^{\alpha_1} = (\hat{z}-1)^{\alpha_1} \exp(-i\pi\alpha_1)$ (siehe (2.10)):

$$(t_1\Psi)(p,\cdot) = \exp(-i\pi\alpha_1)\, \gamma^{-\alpha_1}\Psi(p,\cdot).$$

Analog zu i) erhält man $\tilde{\Psi}(p,\cdot) = \exp(-i\pi\alpha_1)\,\gamma^{-\alpha_1}\tilde{\Psi}(p,\cdot)$ und damit die Behauptung.
Zu iii): Wegen (4.17)iii) und (5.30) gilt :

$$\begin{aligned} -\exp(i\pi\alpha_1)\, \hat{\gamma}^{\alpha_0+\alpha_1-1} (t_\infty\Psi)(p,\cdot) = &[\Psi, t_\infty\Psi](p)\tilde{\Psi}(p,\cdot) \\ &+ [t_\infty\Psi, \tilde{\Psi}](p)\Psi(p,\cdot). \end{aligned} \tag{5.35}$$

Auf dem Sektor

$$B \;=\; \left\{ z \in \widehat{\Omega}^+_\infty \mid -\frac{\pi}{2} < \arg(\hat{\gamma}) + \arg_0(\hat{z}) < \frac{\pi}{2} \right\} \subset \widehat{\Omega}^+_\infty$$

besitzen $\Psi(p,\cdot), \tilde{\Psi}(p,\cdot)$ und $(t_\infty\Psi)(p,\cdot)$ jeweils asymptotische Reihen. Da nun

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(p,\hat{z}) &= \exp(\gamma z)\, \hat{\gamma}^{\alpha_1^*(p)-1} \hat{z}^{\alpha_1^*(p)-1} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right), \\ (t_\infty\Psi)(p,\hat{z}) &= -\exp(i\pi\alpha_1^*(p)) \exp(\gamma z)\, \hat{\gamma}^{\alpha_1^*(p)-1} \hat{z}^{\alpha_1^*(p)-1} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right), \\ \Psi(p,\hat{z}) &= \hat{\gamma}^{\alpha_0^*(p)-1} \hat{z}^{\alpha_0^*(p)-1} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right), \end{aligned}$$

für $z \to \infty$, $\hat{z} \in B$, so sind $\tilde{\Psi}(p,\cdot), (t_\infty \Psi)(p,\cdot)$ dominant und Ψ rezessiv auf B.
Mit (5.35) erhält man dann:

$$\gamma^{\alpha_0+\alpha_1-1} \exp\left(i\pi(\alpha_1^*(p)+\alpha_1)\right) = [\Psi, t_\infty \Psi](p).$$

Mit $\tilde{q}$ aus (5.34) folgt dann mit (5.35)

$$t_\infty \Psi = -\exp\left(i\pi\alpha_1^*\right)\tilde{\Psi} + \tilde{q}\Psi.$$

Ferner gilt $t_\infty \tilde{\Psi} = -\exp\left(i\pi\alpha_1^* \circ \tau_\infty\right)\Psi = -\exp\left(i\pi\alpha_0^*\right)\Psi$.
Zu iv): Aufgrund von (4.8)3) folgt $\alpha_0^*(p) = \alpha_0^*\left(\tau_{01}(p)\right)$.
Wir nehmen zuerst an, dass $\alpha_0^*(p) = \alpha_0^*\left(\tau_{01}(p)\right) \notin \mathbb{Z}$. Dann gilt nach (5.22)2)

$$\Psi(p,\cdot) = \frac{\exp\left(2\pi i\alpha_0^*(p)\right)}{2i\sin(\alpha_0^*(p)\pi)}\left(\mathcal{L}_0\Phi\right)(p,\cdot)$$

und somit folgt über (4.15) und (5.19):

$$\begin{aligned}
\left(t_{01}\Psi\right)(p,\cdot) &= \frac{\exp\left(2\pi i\alpha_0^*(\tau_{01}(p))\right)}{2i\sin(\alpha_0^*(\tau_{01}(p))\pi)}\left(t_{01}\mathcal{L}_0\Phi\right)(p,\cdot)\\
&= \frac{\exp\left(2\pi i\alpha_0^*(p)\right)}{2i\sin(\alpha_0^*(p)\pi)}\left(\phi_1^{-1}\mathcal{L}_0 t_\infty^{-1}\Phi\right)(p,\cdot)\\
&= \frac{\exp\left(2\pi i\alpha_0^*(p)\right)}{2i\sin(\alpha_0^*(p)\pi)}\left(\phi_1^{-1}\mathcal{L}_0\Phi\right)(p,\cdot) = \left(\phi_1^{-1}\Psi\right)(p,\cdot).
\end{aligned}$$

Aus dem Identitätssatz folgt $\left(t_{01}\Psi\right)(p,\cdot) = \left(\phi_1^{-1}\Psi\right)(p,\cdot)$ im Fall $\alpha_0^*(p) \in \mathbb{Z}$.
Aufgrund von $\tilde{\Psi}(p,\cdot) = -\exp\left(i\pi\alpha_1^*(p)\right)\left(t_\infty^{-1}\Psi\right)(p,\cdot)$, $\alpha_1^*(p) = \alpha_1^*\left(\tau_{01}(p)\right)$, $\left(t_{01}t_\infty^{-1}\Psi\right)(p,\cdot) = \exp(-\gamma)\left(t_\infty^{-1}t_{01}\Psi\right)(p,\cdot)$ und $\phi_1^{-1} \circ t_\infty^{-1} = t_\infty^{-1} \circ \phi_1^{-1}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\left(t_{01}\tilde{\Psi}\right)(p,\cdot) &= -\exp\left(i\pi\alpha_1^*\left(\tau_{01}(p)\right)\right)(t_{01}t_\infty^{-1}\Psi)(p,\cdot)\\
&= -\exp\left(i\pi\alpha_1^*(p)\right)\exp(-\gamma)\left(t_\infty^{-1}t_{01}\Psi\right)(p,\cdot)\\
&= -\exp\left(i\pi\alpha_1^*(p)\right)\exp(-\gamma)(t_\infty^{-1}\phi_1^{-1}\Psi)(p,\cdot)\\
&= -\exp\left(i\pi\alpha_1^*(p)\right)\exp(-\gamma)(\phi_1^{-1}t_\infty^{-1}\Psi)(p,\cdot)\\
&= \exp(-\gamma)\left(\phi_1^{-1}\tilde{\Psi}\right)(p,\cdot),
\end{aligned}$$

und damit die Behauptung. □

Umlaufverhalten von $\mathcal{F}_\infty$ bei ∞

Wir beschäftigen uns nun mit der durch

$$\left(\phi_\infty \mathcal{F}_\infty\right)(p,\hat{z}) =: \mathcal{F}_\infty(p,\hat{z}) \circ \mathbf{M}_\infty(p)$$

eindeutig definierten Monodromiematrix $\mathbf{M}_\infty(p)$.
In (5.22) haben wir $2i\sin(\alpha_0^*\pi)\Psi = \exp(2\pi i\alpha_0^*)\,\mathcal{L}_0\Phi$ gezeigt. Aufgrund von $t_{01}^2 = t_\infty^{-2}$ (vgl. (4.6)vi)) folgt aus (5.19) dass $t_{01}^2\Phi = \Phi$ gilt. Ferner folgt wegen $t_\infty \circ \phi_\infty = \phi_\infty \circ t_\infty$ (vgl. (4.6)x)) mit (4.15) dann $\phi_\infty\Psi = t_\infty^2\Psi$. Aufgrund von $\tilde{\Psi} = -\exp(i\pi\alpha_1^*)\,t_\infty^{-1}\Psi$ folgt dann $\phi_\infty\mathcal{F}_\infty = t_\infty^2\mathcal{F}_\infty$.
Ferner gilt wegen (5.33)iii)

$$t_\infty\mathcal{F}_\infty(p,\hat{z}) = \mathcal{F}_\infty(p,\hat{z}) \circ Q_\infty(p).$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_\infty(p,\hat{z}) \circ \mathbf{M}_\infty(p) = t_\infty^2\mathcal{F}_\infty(p,\hat{z}) = t_\infty(\mathcal{F}_\infty \circ Q_\infty)(p,\hat{z}) = (t_\infty\mathcal{F}_\infty)(p,\hat{z}) \circ Q_\infty(\tau_\infty(p))\\ &= \mathcal{F}_\infty(p,\hat{z}) \circ Q_\infty(p) \circ Q_\infty(\tau_\infty(p))\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_\infty &= \begin{pmatrix} \tilde{q} & -\exp(i\pi\alpha_0^*) \\ -\exp(i\pi\alpha_1^*) & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \tilde{q}\circ\tau_\infty & -\exp(i\pi\alpha_1^*) \\ -\exp(i\pi\alpha_0^*) & 0 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} \tilde{q}\cdot(\tilde{q}\circ\tau_\infty) + \exp(2\pi i\alpha_0^*) & -\exp(i\pi\alpha_1^*)\,\tilde{q} \\ -\exp(i\pi\alpha_1^*)\,(\tilde{q}\circ\tau_\infty) & \exp(2\pi i\alpha_1^*) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt dann für $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$:

$$\begin{aligned}\det\mathbf{M}_\infty(p) =& \exp(2\pi i(\alpha_0^*(p) + \alpha_1^*(p))) = \exp(2\pi i(\alpha_0 + \alpha_1)),\\ \mathrm{Spur}\mathbf{M}_\infty(p) =& \exp(2\pi i\alpha_0^*(p)) + \exp(2\pi i\alpha_1^*(p)) + \tilde{q}(p)\cdot(\tilde{q}\circ\tau_\infty)(p)\\ =& \exp\left(2\pi i\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}\right)\left(\exp\left(2\pi i\frac{\beta_0+\beta_1}{\gamma}\right) + \exp\left(-2\pi i\frac{\beta_0+\beta_1}{\gamma}\right)\right)\\ &+ \tilde{q}(p)\cdot(\tilde{q}\circ\tau_\infty(p))\\ =& 2\exp(\pi i(\alpha_0+\alpha_1))\cos\left(\frac{2\pi(\beta_0+\beta_1)}{\gamma}\right) + \tilde{q}(p)\cdot(\tilde{q}\circ\tau_\infty)(p).\end{aligned}$$

Da für $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$:

$$\tilde{q}(p) = \exp(i\pi(\alpha_1^*(p) - \alpha_1))\,\hat{\gamma}^{-\alpha_0-\alpha_1+1}[t_\infty\Psi, t_\infty^{-1}\Psi](p)$$

gilt, sowie $[t_\infty\Psi, \tilde{\Psi}] = \omega(t_\infty\Psi, \tilde{\Psi})\,(p,\hat{z})\,\hat{z}^{1-\alpha_0}(1-\hat{z})^{1-\alpha_1}\exp(-\gamma z)$, $\hat{z} \in \widehat{\Omega}$, so folgt aus der partiellen Holomorphie von $t_\infty\Psi$, $t_\infty^{-1}\Psi$ die partielle Holomorphie von $\tilde{q}$.
Zusätzlich gilt:

$$\mathcal{F}_\infty \circ \mathbf{M}_\infty^2 = \phi_\infty^2\mathcal{F}_\infty = \phi_\infty t_\infty^2\mathcal{F}_\infty = t_\infty^2\phi_\infty\mathcal{F}_\infty = t_\infty^2(\mathcal{F}_\infty \circ \mathbf{M}_\infty) = \mathcal{F}_\infty \circ \mathbf{M}_\infty \circ (\mathbf{M}_\infty \circ \tau_\infty^2),$$

und damit $\mathbf{M}_\infty \circ \tau_\infty^2 = \mathbf{M}_\infty$. Also ist $\tilde{q}(p) = \tilde{q}(\tau_\infty^2(p))$. Damit hat $\tilde{q}$ bezüglich des Parameters $\hat{\gamma} \in \widehat{\mathbb{C}^*}$ kein Umlaufverhalten.
Nun fassen wir die oben erhaltenen Resultate zusammen:

(5.36) Bemerkung(Umlaufverhalten bei ∞):
Für $\tilde{q}$ aus (5.33) gilt:

i) $\tilde{q} : \Lambda \to \mathbb{C}$ *ist holomorph und hat bezüglich* $\hat{\gamma} \in \widehat{\mathbb{C}^*}$ *kein Umlaufverhalten, d.h.* $\tilde{q} \circ \tau_\infty^2 = \tilde{q}$.

ii) $\phi_\infty \mathcal{F}_\infty = t_\infty^2 \mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}_\infty \circ \mathbf{M}_\infty$ *mit*

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_\infty &= \begin{pmatrix} \tilde{q} \cdot (\tilde{q} \circ \tau_\infty) + \exp(2\pi i \alpha_0^*) & -\exp(i\pi\alpha_1^*)\,\tilde{q} \\ -\exp(i\pi\alpha_1^*)(\tilde{q} \circ \tau_\infty) & \exp(2\pi i \alpha_1^*) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{q} & -\exp(i\pi\alpha_0^*) \\ -\exp(i\pi\alpha_1^*) & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \tilde{q} \circ \tau_\infty & -\exp(i\pi\alpha_1^*) \\ -\exp(i\pi\alpha_0^*) & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

iii) Für $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ *gilt:*
$\det \mathbf{M}_\infty = \exp(2\pi i(\alpha_0 + \alpha_1))$ *und*
$\mathit{spur}\mathbf{M}_\infty = 2\exp(\pi i(\alpha_0 + \alpha_1)) \cos\left(\frac{2\pi(\beta_0+\beta_1)}{\gamma}\right) + \tilde{q}(p) \cdot (\tilde{q} \circ \tau_\infty)(p)$.

5.3 Integraldarstellungen spezieller Lösungen

Wir geben nun Umkehrformeln für die Laplacedarstellungen an. Diese verwenden wir im nächsten Kapitel, um ein Transformationsverhalten der Zusammenhangskoeffizienten zu zeigen.

(5.37) Satz: *Man erhält für* $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$*:*

$$\begin{aligned}2\pi i \hat{\gamma}^{\alpha_0+\alpha_1-1}(t_0\Phi)(p,\cdot) = &\exp(i\pi(2\alpha_0 - \alpha_1^*(p)))\left(\mathcal{L}_0\tilde{\Psi}\right)(p,\cdot) \\ &+ \exp(i\pi(\alpha_1^*(p) - 2\alpha_1))\left(\mathcal{L}_1\phi_0\tilde{\Psi}\right)(p,\cdot),\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}2\pi i \hat{\gamma}^{\alpha_0+\alpha_1-1}\left(\phi_0^{-1}t_{01}t_0\Phi\right)(p,\cdot) = &\exp(i\pi(\alpha_0^*(p) - \alpha_0))(\mathcal{L}_0\Psi)(p,\cdot) \\ &+ \exp(i\pi(-\alpha_0 - \alpha_0^*(p)))(\mathcal{L}_1\phi_0\Psi)(p,\cdot).\end{aligned}$$

Beweis: Bei dem Beweis gehen wir analog zu [1] auf Seite 225 vor.
Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ mit $\mathrm{Re}(\alpha_0^*(p)) < 1$.
Für $\hat{z} \in \hat{H}_{-\arg(\hat{\gamma})}$ lässt sich $\Psi(p, \hat{z})$ (mit $-\xi := \pi \in]0, 2\pi[$) aufgrund von (5.28) folgendermaßen darstellen:

$$\Psi(p,\hat{z}) = -\exp(\pi i \alpha_0^*(p)) \int_{L_0^\pi} \exp(\gamma z P(\cdot))\, \varpi(-\alpha_0^*(p), -\alpha_1^*(p), -\gamma, \cdot)\, \Phi(\tau_*(p), \cdot).$$

Somit gilt wegen $\alpha_0^*(\tau_*(p)) = \alpha_0$ für $\mathrm{Re}(\alpha_0) < 1$ und $\hat{z} \in \hat{H}_{-\arg(\hat{\gamma})}$:

$$\begin{aligned}\Psi(\tau_*(p), \hat{z}) &= -\exp(\pi i \alpha_0) \int\limits_{L_0^\pi} \exp(\gamma z P(\cdot))\, \varpi(-\alpha_0, -\alpha_1, -\gamma, \cdot)\, \Phi(p, \cdot) \\ &= -\exp(\pi i \alpha_0) \int\limits_0^{-\infty} \exp(\gamma(z-1)\tau)\, \tau_\pi^{-\alpha_0} (1-\tau)^{-\alpha_1} \tilde{\Phi}(p, \tau) d\tau,\end{aligned}$$

wobei $z_\pi^{-\alpha_0} := \left(\left(P|_{\hat{H}_\pi}\right)^{-1}(z)\right)^{-\alpha_0}$, $z \in H_\pi$, und $(1-\tau)^{-\alpha_1}$ der Hauptwert ist. Wir bezeichnen dann

$$f := \Psi(\tau_*(p), \cdot) \circ \left(P|_{\hat{H}_{-\arg(\hat{\gamma})}}\right)^{-1} \in \mathcal{H}\left(H_{-\arg(\hat{\gamma})}\right)$$

und transformieren mit $s = \gamma\left(z - \frac{1}{2}\right)$ (also $z = \frac{s}{\gamma} + \frac{1}{2}$) für $z \in H_{-\arg(\hat{\gamma})}$.
Dann folgt

$$z \in H_{-\arg(\hat{\gamma})} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2} |\operatorname{Re}(\gamma)|$$

aus

$$z \in H_{-\arg(\hat{\gamma})} \Leftrightarrow (\operatorname{Re}(z \exp(i \arg(\hat{\gamma}))) > 0 \text{ und } \operatorname{Re}((z-1)\exp(i\arg(\hat{\gamma}))) > 0),$$

sowie

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}(z \exp(i \arg(\hat{\gamma}))) > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\left(\frac{s}{\gamma} + \frac{1}{2}\right)\exp(i\arg(\hat{\gamma}))\right) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(s) > -\frac{1}{2}\operatorname{Re}(\gamma), \\ &\operatorname{Re}((z-1)\exp(i \arg(\hat{\gamma}))) > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\left(\left(\frac{s}{\gamma} - \frac{1}{2}\right)\exp(i\arg(\hat{\gamma}))\right) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}\operatorname{Re}(\gamma).\end{aligned}$$

Für $s \in \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) > \frac{1}{2}|\operatorname{Re}(\gamma)|\}$ gilt dann:

$$\exp(-\pi i \alpha_0) f\left(\frac{s}{\gamma} + \frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^\infty \exp(-s\tau)(-\tau)_\pi^{-\hat{\alpha_0}} (1+\tau)^{-\alpha_1} \exp\left(\frac{\gamma}{2}\tau\right) \tilde{\Phi}(p, -\tau) d\tau.$$

Dann folgt wegen $|\gamma| > \frac{1}{2}|\operatorname{Re}(\gamma)|$ und der Umkehrformel für die Laplacetransformation (vgl. [1], Seite 212, Satz 3) für $\tau > 0$:

$$\begin{aligned}&\exp\left(\frac{\gamma}{2}\tau\right)(-\tau)_\pi^{-\alpha_0}(1+\tau)^{-\alpha_1}\tilde{\Phi}(p, -\tau) \\ &\qquad = \frac{\exp(-\pi i \alpha_0)}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int\limits_{\overline{|\gamma| - iT, |\gamma| + iT}} \exp(s\tau) f\left(\frac{s}{\gamma} + \frac{1}{2}\right) ds\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
&\exp(\gamma\tau)(-\tau)_{\pi}^{-\alpha_0}(1+\tau)^{-\alpha_1}\tilde{\Phi}(p,-\tau)\\
&\qquad = \frac{\exp(-\pi i\alpha_0)}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int\limits_{\overline{|\gamma|-iT,|\gamma|+iT}} \exp\left(\left(s+\frac{\gamma}{2}\right)\tau\right) f\left(\frac{s}{\gamma}+\frac{1}{2}\right) ds\\
&\qquad = \gamma\frac{\exp(-\pi i\alpha_0)}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int\limits_{g_T}\exp(-\gamma\zeta(-\tau))\, f(\zeta)\, d\zeta
\end{aligned}$$

mit $g_T : [-T,T] \ni t \to \frac{1}{2} + \left(1 + i\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\exp(-i\arg(\hat{\gamma})) \in H_{-\arg(\hat{\gamma})}$.
Daher gilt für $\hat{z} \in \hat{H}_{\pi} \cap \left\{\hat{z} \in \widehat{\Omega} | \arg_0(\hat{z}) = \pi\right\}$:

$$\hat{z}^{-\alpha_0}(1-\hat{z})^{-\alpha_1}\exp(-\gamma z)\,\Phi(p,\hat{z}) = \frac{\gamma\exp(-\pi i\alpha_0)}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int\limits_{\hat{g}_T}\exp(-\gamma z P(\cdot))\,\Psi(\tau_*(p),\cdot)\,,$$

wobei $\hat{g}_T : [-T,T] \ni t \to \hat{H}_{-\arg(\hat{\gamma})} \subset \widehat{\Omega}_{\infty}^{+}$ eindeutig durch $P \circ \hat{g}_T = g_T$ festgelegt wird.
Wir definieren nun für $\xi \in \mathbb{R}$ mit $\hat{\varphi}_\xi$ aus (4.9) und $T > 1$:

$$\hat{\varphi}_\xi^T : [0,1] \ni \tau \to \hat{\varphi}_\xi(\tau T)$$

und

$$\begin{aligned}
l_1(T) &: [0,1] \ni \tau \to \frac{1}{2} + \left(i\frac{T}{\sqrt{2}} + (1-\tau)\right)\exp(-i\arg(\hat{\gamma}))\,,\\
l_2(T) &: [0,1] \ni \tau \to \frac{1}{2} + \left(-i\frac{T}{\sqrt{2}} + \tau\right)\exp(-i\arg(\hat{\gamma}))\,,\\
v_1(T) &: \left[-\frac{\pi}{2},0\right] \ni \tau \to \frac{1}{2} + \frac{T}{\sqrt{2}}\exp(i(\tau+\pi) - i\arg(\hat{\gamma}))\,,\\
v_2(T) &: \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \ni \tau \to \frac{1}{2} + \frac{T}{\sqrt{2}}\exp(i(\tau+\pi) - i\arg(\hat{\gamma}))
\end{aligned}$$

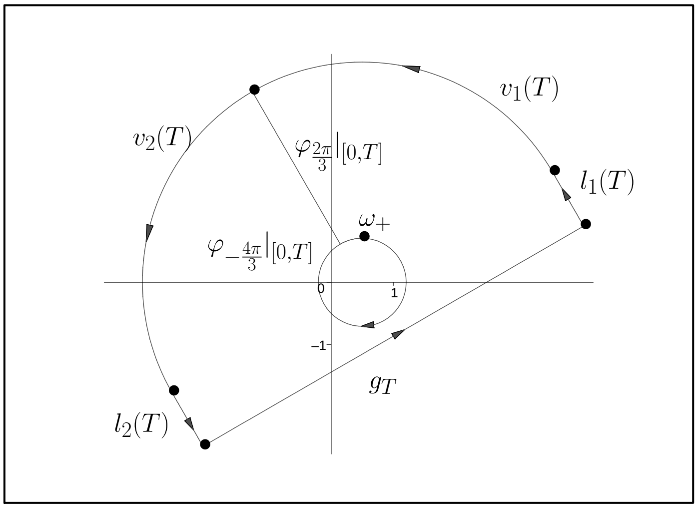
und betrachten deren Liftungen $\hat{l}_1(T), \hat{l}_2(T), \hat{v}_1(T), \hat{v}_2(T)$ in $\widehat{\Omega}_{\infty}^{+}$ mit $\hat{l}_1(T)(0) := \hat{g}_T(T)$, $\hat{l}_2(T)(1) := \hat{g}_T(-T)$, $\hat{v}_1(T)(-\frac{\pi}{2}) := \hat{l}_1(T)(1)$ und $\hat{v}_2(T)(\frac{\pi}{2}) := \hat{l}_2(T)(0)$.
Mit dem Cauchyschen Integralsatz gilt:

$$0 = \left(\int\limits_{\hat{g}_T} + \int\limits_{\hat{l}_1(T)} + \int\limits_{\hat{v}_1(T)} - \int\limits_{\hat{\varphi}^T_{-\arg(\hat{\gamma})+\pi}} + \int\limits_{\hat{\varphi}^T_{-\arg(\hat{\gamma})-\pi}} + \int\limits_{\hat{v}_2(T)} + \int\limits_{\hat{l}_2(T)}\right)\exp(-\gamma P(\cdot)z)\,\Psi(\tau_*(p),\cdot).$$

Aufgrund von (4.8) folgt $\alpha_0^*(\tau_*(p)) = \alpha_0$ und somit wegen (5.22)

$$\Psi\left(\tau_*(p),\hat{t}\right) = \hat{t}^{\alpha_0-1}\mathcal{O}(1),\ t\to\infty \tag{5.38}$$

Abbildung 4: Spuren der Kurven im Fall $\arg(\hat{\gamma}) = \frac{\pi}{3}$ und $T = 5$.



für $\hat{t} \in \widehat{\Omega}^+_\infty$ mit $-\frac{3\pi}{2} - \arg(\hat{\gamma}) + \delta \leq \arg_0\left(\hat{t}\right) \leq \frac{3\pi}{2} - \arg(\hat{\gamma}) - \delta$, mit $\delta > 0$ klein genug. Wir zeigen nun $\left(\int\limits_{\hat{l}_1(T)} + \int\limits_{\hat{v}_1(T)} + \int\limits_{\hat{v}_2(T)} + \int\limits_{\hat{l}_2(T)}\right) \exp(-\gamma z P(\cdot))\,\Psi(\tau_*(p), \cdot) \to 0 \ (T \to \infty)$. Da $\mathrm{Re}(\alpha_0) < 1$, so gilt mit (5.38):

$$\left| \int\limits_{\hat{l}_j(T)} \exp(-\gamma z P(\cdot))\,\Psi(\tau_*(p), \cdot) \right| \to 0, \text{ für } T \to \infty, j = 1, 2.$$

Mit dem Jordanschen Lemma (9.31) aus dem Anhang folgt zudem mit (5.38):

$$\left| \int\limits_{\hat{v}_1(T)} + \int\limits_{\hat{v}_2(T)} \exp(-\gamma P(\cdot) z)\,\Psi(\tau_*(p), \cdot) \right| \to 0, \text{ für } T \to \infty.$$

Da für $T > 1$ die Kurven $(\vartheta_0 + \vartheta_1) + \varphi_{-\arg(\hat{\gamma})-\pi}|_{[0,T]}$ und $\varphi_{-\arg(\hat{\gamma})+\pi}|_{[0,T]}$ homotop sind, so gilt dies auch für $(\hat{\vartheta}_0 + d_0 \circ \hat{\vartheta}_1) + d_0 \circ d_1 \circ \hat{\varphi}^T_{-\arg(\hat{\gamma})-\pi}$ und $\hat{\varphi}^T_{-\arg(\hat{\gamma})+\pi}$, da beide Kurven bei $\hat{\omega}_+$ starten. Mit $u(\hat{z}, \hat{t}) := \exp(-\gamma z t)\Psi\left(\tau_*(p), \hat{t}\right)$ $(\hat{t}, \hat{z} \in \widehat{\Omega})$ gilt somit für $\hat{z} \in \hat{H}_\pi \cap \left\{\hat{z} \in \widehat{\Omega} \middle| \arg_0(\hat{z}) = \pi\right\}$:

$$\int\limits_{\hat{\varphi}_{-\arg(\hat{\gamma})+\pi}} u(\hat{z}, \cdot) = \left(\int\limits_{\hat{\vartheta}_0} + \int\limits_{d_0 \circ \hat{\varphi}_{-\arg(\hat{\gamma})-\pi}} - \int\limits_{d_0 \circ \hat{\varphi}_{-\arg(\hat{\gamma})-\pi}} + \int\limits_{d_0 \circ \hat{\vartheta}_1} + \int\limits_{d_0 \circ d_1 \circ \hat{\varphi}_{-\arg(\hat{\gamma})-\pi}} \right) u(\hat{z}, \cdot).$$

Aufgrund von (5.19) folgt $(t_0\Phi)(\tau_0 \circ \tau_1 \circ \tau_\infty(p), \hat{z}) = \hat{z}^{-\alpha_0}(1-\hat{z})^{-\alpha_1} \exp(-\gamma z)\, \Phi(p, \hat{z})$ für $\hat{z} \in \widehat{\Omega}$. Damit gilt

$$(t_0\Phi)(\tau_0 \circ \tau_1 \circ \tau_\infty(p), \hat{z}) = \frac{\gamma \exp(-\pi i \alpha_0)}{2\pi i} \left(\int\limits_{S_0^{-\arg(\hat{\gamma})-\pi}} + \int\limits_{d_0 \circ S_1^{-\arg(\hat{\gamma})-\pi}} \right) u(\hat{z}, \cdot).$$

Wir ersetzen nun in der oberen Gleichung p durch $\tau_\infty^{-1} \circ \tau_1 \circ \tau_0(p) = (-\alpha_0, \beta_0, -\alpha_1, \beta_1, \delta_{-\pi}(\hat{\gamma}))$ und erhalten mit $-\arg(\delta_{-\pi}(\hat{\gamma})) = -\arg(\hat{\gamma}) + \pi$:

$$\begin{aligned}(t_0\Phi)(p, \hat{z}) = -\gamma \frac{\exp(\pi i \alpha_0)}{2\pi i} \left(\int\limits_{S_0^{-\arg(\hat{\gamma})}} + \int\limits_{d_0 \circ S_1^{-\arg(\hat{\gamma})}} \right) &\exp(\gamma z P(\cdot)) \cdot \\ &\Psi\left(\tau_* \circ \tau_\infty^{-1} \circ \tau_1 \circ \tau_0(p), \cdot\right).\end{aligned}$$

Wegen der Regeln aus (4.8)3. und (4.5) gilt:

$$\begin{aligned} & \tau_* \circ \tau_\infty^{-1} \circ \tau_1 \circ \tau_0 = \tau_* \circ \tau_1 \circ \tau_0 \circ \tau_\infty^{-1} = \tau_* \circ \tau_1 \circ \tau_0 \circ \tau_*^2 \circ \tau_\infty^{-1} \\ = \; & \tau_{01}^{-1} \circ \tau_0 \circ \tau_1 \circ \tau_\infty^{-1} \circ \tau_* \circ \tau_\infty^{-1} = \tau_{01}^{-1} \circ \tau_0 \circ \tau_1 \circ \tau_\infty^{-1} \circ \tau_{01} \circ \tau_* = \tau_0 \circ \tau_1 \circ \tau_\infty^{-1} \circ \tau_*. \end{aligned}$$

Ferner folgt aus (5.33) für $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$:

$$\hat{z}^{\alpha_0}(1-\hat{z})^{\alpha_1} \Psi(\tau_0 \circ \tau_1(p), \hat{z}) = (t_1 t_0 \Psi)(p, \hat{z}) = \exp(-i\pi\alpha_1)\hat{\gamma}^{-\alpha_0-\alpha_1} \Psi(p, \hat{z}) \quad (\hat{z} \in \widehat{\Omega}). \tag{5.39}$$

Ersetzt man nun in (5.39) p durch $\tau_\infty^{-1} \circ \tau_*(p) = (\alpha_0^*(p), \beta_0^*(p), \alpha_1^*(p), \beta_1^*(p), \delta_{-\pi}(\hat{\gamma}))$ so folgt:

$$\begin{aligned} & \Psi(\tau_0 \circ \tau_1 \circ \tau_\infty^{-1} \circ \tau_*(p), \hat{z}) \\ & = \hat{z}^{-\alpha_0^*(p)}(1-\hat{z})^{-\alpha_1^*(p)} (\delta_{-\pi}(\hat{\gamma}))^{-\alpha_0^*(p)-\alpha_1^*(p)} \exp(-i\pi\alpha_1^*(p))\, \Psi\left(\tau_\infty^{-1} \circ \tau_*(p), \hat{z}\right) \\ & = \hat{z}^{-\alpha_0^*(p)}(1-\hat{z})^{-\alpha_1^*(p)} \hat{\gamma}^{-\alpha_0^*(p)-\alpha_1^*(p)} \exp(i\pi\alpha_0^*(p)) \exp(-\gamma z) \left(t_\infty^{-1}\Psi\right)(\tau_*(p), \hat{z}). \end{aligned}$$

Mit der Definition (3.4) von ϖ ,$\alpha_1^*(\tau_*(p)) = \alpha_1$, $\alpha_0^*(p) + \alpha_1^*(p) = \alpha_0 + \alpha_1$ (siehe (4.8)) und der Definition (5.29) von $\tilde{\Psi}$ folgt für $\hat{z} \in \widehat{\Omega}$:

$$\begin{aligned} & \Psi(\tau_0 \circ \tau_1 \circ \tau_\infty^{-1} \circ \tau_*(p), \hat{z}) \\ & \quad = -\hat{\gamma}^{-\alpha_0-\alpha_1} \exp(i\pi(\alpha_0^*(p) - \alpha_1))\, \varpi(-\alpha_0^*(p), -\alpha_1^*(p), -\gamma, \hat{z})\, \tilde{\Psi}(\tau_*(p), \hat{z}). \end{aligned}$$

Somit erhält man mit $\alpha_0^*(p) - \alpha_1 = \alpha_0 - \alpha_1^*(p)$ für $\hat{z} \in \hat{H}_\pi \cap \left\{ \hat{z} \in \widehat{\Omega} \middle| \arg_0(\hat{z}) = \pi \right\}$:

$$
\begin{aligned}
&2\pi i \cdot \hat{\gamma}^{\alpha_0+\alpha_1-1} \exp\left(i\pi(-2\alpha_0 + \alpha_1^*(p))\right) \cdot (t_0\Phi)(p, \hat{z}) \\
&= \left(\int\limits_{S_0^{-\arg(\hat{\gamma})}} + \int\limits_{d_0 \circ S_1^{-\arg(\hat{\gamma})}} \right) \exp\left(\gamma z P(\cdot)\right) \varpi\left(-\alpha_0^*(p), -\alpha_1^*(p), -\gamma, \cdot\right) \tilde{\Psi}\left(\tau_*(p), \cdot\right) \\
&= \left(\mathcal{L}_0 \tilde{\Psi}\right)(p, \hat{z}) + \int\limits_{S_1^{-\arg(\hat{\gamma})}} \exp\left(\gamma z P(\cdot)\right) \varpi\left(-\alpha_0^*(p), -\alpha_1^*(p), -\gamma, d_0(\cdot)\right) \tilde{\Psi}\left(\tau_*(p), d_0(\cdot)\right) \\
&= \left(\mathcal{L}_0 \tilde{\Psi}\right)(p, \hat{z}) + \exp\left(-2\pi i \alpha_0^*(p)\right) \left(\mathcal{L}_1 \phi_0 \tilde{\Psi}\right)(p, \hat{z}).
\end{aligned}
$$

Mit dem Identitätssatz und $\alpha_0^*(p) + \alpha_1^*(p) = \alpha_0 + \alpha_1$ folgt dann die erste Behauptung. Für $l \in \{0, 1\}$ gilt aufgrund der Definition (5.29) und (4.8):

$$
\left(\mathcal{L}_l \tilde{\Psi}\right)(p, \cdot) = -\exp\left(i\pi\alpha_1^*(\tau_*(p))\right) \left(\mathcal{L}_l t_\infty^{-1} \Psi\right)(p, \cdot) = -\exp\left(i\pi\alpha_1\right) \left(\mathcal{L}_l t_\infty^{-1} \Psi\right)(p, \cdot),
$$

und so folgt aus der ersten Behauptung von (5.37) und $\alpha_0^*(p) + \alpha_1^*(p) = \alpha_0 + \alpha_1$:

$$
\begin{aligned}
2\pi i \hat{\gamma}^{\alpha_0+\alpha_1-1} (t_0\Phi)(p, \cdot) = &- \exp\left(i\pi\left(\alpha_0 + \alpha_0^*(p)\right)\right) \left(\mathcal{L}_0 t_\infty^{-1} \Psi\right)(p, \cdot) \\
&- \exp\left(i\pi\left(\alpha_1^*(p) - \alpha_1\right)\right) \left(\mathcal{L}_1 \phi_0 t_\infty^{-1} \Psi\right)(p, \cdot).
\end{aligned} \tag{5.40}
$$

Für $l = 0, 1$ und $y \in \mathcal{F}\left(\Lambda \times \widehat{\Omega}\right)$ mit $y(p, \cdot) \in \mathrm{Kern}\left(L(p)\right)$ $(p \in \Lambda)$ gilt wegen (4.15) $(t_{01} \mathcal{L}_l y) = \left(\phi_1^{-1} \mathcal{L}_l t_\infty^{-1} y\right)$ und somit folgt:

$$
\begin{aligned}
(\phi_0 \mathcal{L}_l t_\infty y) = \left(\phi_0 t_{01}^{-1} t_{01} \mathcal{L}_l t_\infty y\right) &= \left(\phi_0 t_{01}^{-1} \phi_1^{-1} \mathcal{L}_l t_\infty^{-1} t_\infty y\right) \\
&= \left(\phi_0 \phi_0^{-1} t_{01}^{-1} \mathcal{L}_l y\right) = \left(t_{01}^{-1} \mathcal{L}_l y\right).
\end{aligned}
$$

Damit erhält man mit $\tau_{01}^{-1}(p) = (\alpha_1, -\beta_1, \alpha_0, -\beta_0, \delta_\pi(\hat{\gamma}))$ und $\alpha_j^*\left(\tau_{01}^{-1}(p)\right) = \alpha_j^*(p)$, $j = 0, 1$ über (5.40):

$$
\begin{aligned}
2\pi i \left(\delta_\pi(\hat{\gamma})\right)^{\alpha_0+\alpha_1-1} \left(t_{01}^{-1} t_0 \Phi\right)(p, \cdot) = &- \exp\left(i\pi\left(\alpha_1 + \alpha_0^*(p)\right)\right) \left(t_{01}^{-1} \mathcal{L}_0 t_\infty^{-1} \Psi\right)(p, \cdot) \\
&- \exp\left(i\pi\left(\alpha_1^*(p) - \alpha_0\right)\right) \left(t_{01}^{-1} \mathcal{L}_1 t_\infty^{-1} \phi_0 \Psi\right)(p, \cdot).
\end{aligned}
$$

Damit folgt

$$
\begin{aligned}
2\pi i \hat{\gamma}^{\alpha_0+\alpha_1-1} \left(t_{01}^{-1} t_0 \Phi\right)(p, \cdot) = &\exp\left(i\pi\left(\alpha_0^*(p) - \alpha_0\right)\right) \left(\phi_0 \mathcal{L}_0 \Psi\right)(p, \cdot) \\
&+ \exp\left(i\pi\left(-\alpha_0 - \alpha_0^*(p)\right)\right) \left(\phi_0 \mathcal{L}_1 \phi_0 \Psi\right)(p, \cdot).
\end{aligned}
$$

□

Integraldarstellung für $\tilde{\Psi}$ mit konfluenter hypergeometrischer Funktion als Kern

Nun geben wir eine Integraldarstellung für $\tilde{\Psi}$ an, welche man mit Satz (3.5) erhält. Hierbei wird deutlich, wie sich die Laplacedarstellungen in (5.22) und (5.29) ebenfalls aus der simultanen Separierbarkeit in Abschnitt 1.2 gewinnen lassen.

(5.41) Bemerkung: *Für $\hat{z} \in \hat{H}_{-\arg(\hat{\gamma})+\pi}$ gilt:*

$$\begin{aligned} &2i\sin\left(\pi\alpha_0\right)\exp\left(i\pi(1-\alpha_1^*(p)-2\alpha_0)-\gamma\right)\tilde{\Psi}\left(p,\hat{z}\right) \\ =&\int\limits_{S_0^\pi}\exp\left(\gamma\theta_2\left(\cdot,\hat{z}\right)\right)\tilde{\psi}\left(\alpha_0-\alpha_1^*\left(p\right),1-\alpha_1,-\gamma\theta_2\left(\cdot,\hat{z}\right)\right)\varpi\left(-\alpha_0,-\alpha_1,-\gamma,\cdot\right)\Phi\left(p,\cdot\right), \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\psi}\left(a,c,\cdot\right) : \{z \in \mathbb{C}^* |\, \mathrm{Re}(z) > 0\} \to \mathbb{C}$ für $a, c \in \mathbb{C}$ die durch ihr asymptotisches Verhalten

$$\tilde{\psi}(a,c,z) = z^{-a}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right), \quad z \to \infty$$

eindeutig bestimmte Lösung von (1.8) ist und mit z^{-a} der Hauptwert gemeint ist. Hierbei ist θ_2 wie in (3.3) und S_0^π wie in (4.9) definiert.

Die Integraldarstellung für $\tilde{\Psi}$ in (5.41) lässt sich verallgemeinern indem man den Integrationsweg durch S_0^ξ ersetzt und ξ in der Nähe von π variiert.

Beweis:

Sei wieder $z_\pi^a := \left(\left(P|_{\hat{H}_\pi}\right)^{-1}(z)\right)^a$ für $z \in H_\pi$ und $a \in \mathbb{C}$.

Dann gilt für $\mathrm{Re}(\alpha), \mathrm{Re}(\beta) > 0$ und $z \in]-\infty, 0[$:

$$\begin{aligned} \int_{\overline{0,z}}\frac{(z-t)_\pi^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\frac{t_\pi^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}dt &= \frac{-1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^{|z|}(-|z|+\tau)_\pi^{\alpha-1}(-\tau)_\pi^{\beta-1}d\tau \\ &= \frac{\exp\left(i\pi(\alpha+\beta-1)\right)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^{|z|}(|z|-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1}d\tau \\ &= \exp\left(i\pi(\alpha+\beta-1)\right)\frac{|z|^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \frac{z_\pi^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

Für $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ und $\tilde{\Phi}$ aus (5.1) gilt

$$z_\pi^{-\alpha_0}\tilde{\Phi}(p,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n(p)}{\Gamma(n+1-\alpha_0)}z_\pi^{n-\alpha_0},\ z \in H_\pi \cap K_1(0).$$

Aufgrund von $a_n \circ \tau_* = a_n$, $n \in \mathbb{N}$ folgt somit für $\mathrm{Re}(\alpha_0^*(p)) < \mathrm{Re}(\alpha_0) < 0$ und $z \in]-\infty, 0[$

$$\begin{aligned} &\int_{\overline{0,z}}\frac{(z-t)_\pi^{\alpha_0-\alpha_0^*(p)-1}}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_0^*(p))}t_\pi^{-\alpha_0}\tilde{\Phi}(p,t)dt = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(p)\left(\int_{\overline{0,z}}\frac{(z-t)_\pi^{\alpha_0-\alpha_0^*(p)-1}}{\Gamma(\alpha_0-\alpha_0^*(p))}\frac{t_\pi^{n-\alpha_0}}{\Gamma(n+1-\alpha_0)}dt\right) \\ =&\sum_{n=0}^{\infty}a_n(p)\frac{z_\pi^{-\alpha_0^*(p)}}{\Gamma(n+1-\alpha_0^*(p))} = z^{-\alpha_0^*(p)}\tilde{\Phi}(\tau_*(p),z). \end{aligned}$$

Ferner gilt für $\mathrm{Re}(\alpha_0^*(p)) < \mathrm{Re}(\alpha_0) < 0$ und $\hat{z} \in \hat{H}_{-\arg(\hat{\gamma})}$ aufgrund von (5.28):

$$-\exp\left(-\pi i \alpha_0^*(p)\right) \Psi\left(p, \hat{z}\right) = \int\limits_{L_0^\pi} \exp\left(\gamma z P(\cdot)\right) \varpi\left(-\alpha_0^*(p), -\alpha_1^*(p), -\gamma, \cdot\right) \Phi\left(\tau_*(p), \cdot\right)$$

$$= \int\limits_0^{-\infty} \exp\left(\gamma(z-1)t\right)(1-t)^{-\alpha_1^*(p)} t_\pi^{-\alpha_0^*(p)} \tilde{\Phi}(\tau_*(p), t) dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_0 - \alpha_0^*(p))} \int\limits_0^{-\infty} \int\limits_{\overline{0,t}} \exp\left(\gamma(z-1)t\right)(1-t)^{-\alpha_1^*(p)} (t-\sigma)_\pi^{\alpha_0 - \alpha_0^*(p) - 1} \sigma_\pi^{-\alpha_0} \tilde{\Phi}(p, \sigma) d\sigma dt$$

$$\overset{Fubini}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha_0 - \alpha_0^*(p))} \int\limits_0^{-\infty} \sigma_\pi^{-\alpha_0} \tilde{\Phi}(p, \sigma) \int\limits_\sigma^{-\infty} \exp\left(\gamma(z-1)t\right)(1-t)^{-\alpha_1^*(p)} (t-\sigma)_\pi^{\alpha_0 - \alpha_0^*(p) - 1} dt d\sigma,$$

wobei mit $(1-t)^{-\alpha_1^*(p)}$ der Hauptwert gemeint ist.
Wir betrachten nun für $\sigma \in]-\infty, 0[$:

$$\Gamma(\alpha_0 - \alpha_0^*(p)) I(\sigma) := \sigma_\pi^{-\alpha_0} \int\limits_\sigma^{-\infty} \exp\left(\gamma(z-1)t\right)(1-t)^{-\alpha_1^*(p)} (t-\sigma)_\pi^{\alpha_0 - \alpha_0^*(p) - 1} dt$$

$$= \sigma_\pi^{-\alpha_0} \int\limits_0^{-\infty} \exp\left(\gamma(z-1)(\tau+\sigma)\right)(1-\sigma-\tau)^{-\alpha_1^*(p)} \tau_\pi^{\alpha_0 - \alpha_0^*(p) - 1} d\tau$$

$$= \sigma_\pi^{-\alpha_0} \exp\left(\gamma(z-1)\sigma\right) \int\limits_0^{-\infty} \exp\left(\gamma(z-1)\tau\right)(1-\sigma-\tau)^{-\alpha_1^*(p)} \tau_\pi^{\alpha_0 - \alpha_0^*(p) - 1} d\tau.$$

Transformiert man nun mit $|1-\sigma| t = (1-\sigma)t := \tau$, so folgt mit $\alpha_0 + \alpha_1 = \alpha_0^*(p) + \alpha_1^*(p)$:

$$\Gamma(\alpha_0 - \alpha_0^*(p)) I(\sigma) = (1-\sigma)^{-\alpha_1^*(p)} (1-\sigma)^{\alpha_0 - \alpha_0^*(p)} \sigma_\pi^{-\alpha_0} \exp\left(\gamma(z-1)\sigma\right) \cdot$$
$$\int\limits_0^{-\infty} \exp\left(\gamma(z-1)(1-\sigma)t\right)(1-t)^{-\alpha_1^*(p)} t_\pi^{\alpha_0 - \alpha_0^*(p) - 1} dt$$
$$= \exp\left(i\pi(\alpha_0 - \alpha_0^*(p))\right)(1-\sigma)^{-\alpha_1} \sigma_\pi^{-\alpha_0} \exp\left(\gamma(z-1)\sigma\right) \cdot$$
$$\int\limits_0^{\infty} \exp\left(-\gamma(z-1)(1-\sigma)t\right)(1+t)^{-\alpha_1^*(p)} t^{\alpha_0 - \alpha_0^*(p) - 1} dt.$$

Da nun $\hat{z} \in \hat{H}_{-\arg(\hat{\gamma})}$ und $\sigma \in]-\infty, 0[$ vorausgesetzt war, gilt $\gamma(z-1)(1-\sigma) \in H_0$. Aus [15] (S. 167,(24)) folgt mit

$$\theta_2(\hat{t}, \hat{z}) = (z-1)(1-t) \quad (\hat{t}, \hat{z} \in \widehat{\Omega})$$

(vgl. (3.3)) dann für $\hat{z} \in \hat{H}_{-\arg(\hat{\gamma})}$ und $\hat{\sigma} \in \text{Spur}\,(L_0^\pi)$:

$$\begin{aligned} I(\sigma) =& \exp\left(i\pi(\alpha_0 - \alpha_0^*(p))\right)(1-\sigma)^{-\alpha_1}\sigma_\pi^{-\alpha_0}\exp\left(\gamma(z-1)\sigma\right)\cdot \\ & \tilde{\psi}\left(\alpha_0 - \alpha_0^*(p), 1-\alpha_1, \gamma(z-1)(1-\sigma)\right) \\ =& \exp\left(i\pi(\alpha_0 - \alpha_0^*(p))\right)\exp\left(\gamma z\sigma\right) \\ & \varpi\left(-\alpha_0, -\alpha_1, -\gamma, \hat{\sigma}\right)\tilde{\psi}\left(\alpha_0 - \alpha_0^*(p), 1-\alpha_1, \gamma\theta_2\left(\hat{\sigma}, \hat{z}\right)\right). \end{aligned}$$

Somit gilt für $\hat{z} \in \hat{H}_{-\arg(\hat{\gamma})}$ im Falle $\alpha_0^*(p) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ und $\text{Re}(\alpha_0^*(p)) < \text{Re}(\alpha_0) < 0$:

$$\begin{aligned} & -\exp\left(-\pi i\alpha_0\right)\Psi\left(p, \hat{z}\right) \\ =& \int_{L_0^\pi} \exp\left(\gamma z P(\cdot)\right)\tilde{\psi}\left(\alpha_0 - \alpha_0^*(p), 1-\alpha_1, \gamma\theta_2\left(\cdot, \hat{z}\right)\right)\varpi\left(-\alpha_0, -\alpha_1, -\gamma, \cdot\right)\Phi(p, \cdot). \end{aligned}$$

Analog zu (5.26) folgt für $\alpha_0^*(p) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, $\text{Re}(\alpha_0^*(p)) < \text{Re}(\alpha_0) < 0$ und $\hat{z} \in \hat{H}_{-\arg(\hat{\gamma})}$:

$$\begin{aligned} & 2i\sin\left(\pi\alpha_0\right)\exp\left(-2\pi i\alpha_0\right)\Psi\left(p, \hat{z}\right) \\ =& \int_{S_0^\pi} \exp\left(\gamma z P(\cdot)\right)\tilde{\psi}\left(\alpha_0 - \alpha_0^*(p), 1-\alpha_1, \gamma\theta_2\left(\cdot, \hat{z}\right)\right)\varpi\left(-\alpha_0, -\alpha_1, -\gamma, \cdot\right)\Phi(p, \cdot). \end{aligned} \tag{5.42}$$

Da obiges Integral für alle $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ existiert, gilt (5.42) mit Hilfe des Identitätssatzes für alle $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$.
Wir wenden nun die Transformation t_∞^{-1} auf (5.42) an.
Mit $\tau_\infty^{-1}(p) = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \delta_{-\pi}\left(\hat{\gamma}\right))$ gilt dann wegen $\alpha_0^*\left(\tau_\infty^{-1}(p)\right) = \alpha_1^*\left(p\right)$
für $\hat{z} \in \hat{H}_{-\arg(\delta_{-\pi}(\hat{\gamma}))} = \hat{H}_{-\arg(\hat{\gamma})+\pi}$:

$$\begin{aligned} & 2i\sin\left(\pi\alpha_0\right)\exp\left(-2\pi i\alpha_0\right)\exp(\gamma z)\Psi\left(\tau_\infty^{-1}(p), \hat{z}\right) \\ =& \int_{S_0^\pi} \exp\left(\gamma z\left(1 - P(\cdot)\right)\right)\tilde{\psi}\left(\alpha_0 - \alpha_1^*(p), 1-\alpha_1, -\gamma\theta_2\left(\cdot, \hat{z}\right)\right)\varpi\left(-\alpha_0, -\alpha_1, \gamma, \cdot\right)\Phi(\tau_\infty^{-1}(p), \cdot). \end{aligned}$$

Unter Verwendung von

$$\exp\left(\gamma t\right)\Phi\left(\tau_\infty^{-1}(p), \hat{t}\right) = \Phi\left(p, \hat{t}\right),\ \gamma\theta_2(\hat{t}, \hat{z}) := \gamma z\left(1 - t\right) + \gamma t - \gamma \quad (\hat{t}, \hat{z} \in \widehat{\Omega})$$

folgt dann für $\hat{z} \in \hat{H}_{-\arg(\hat{\gamma})+\pi}$:

$$\begin{aligned} & 2i\sin\left(\pi\alpha_0\right)\exp\left(-2\pi i\alpha_0\right)\exp\left(i\pi(1 - \alpha_1^*(p)) - \gamma\right)\tilde{\Psi}\left(p, \hat{z}\right) \\ =& \int_{S_0^\pi} \exp\left(\gamma\theta_2\left(\cdot, \hat{z}\right)\right)\tilde{\psi}\left(\alpha_0 - \alpha_1^*\left(p\right), 1-\alpha_1, -\gamma\theta_2\left(\cdot, \hat{z}\right)\right)\varpi\left(-\alpha_0, -\alpha_1, -\gamma, \cdot\right)\Phi\left(p, \cdot\right). \end{aligned}$$

□

6 Zusammenhangsprobleme

Um das globale Verhalten von Lösungen der *CHE* zu beschreiben, ist es notwendig den Zusammenhang von $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_\infty$ zu verstehen.
In diesem Abschnitt gelingt es uns, mit einer einzigen Funktionen ζ und den Parametertransformationen $\tau_0, \tau_1, \tau_{01}, \tau_\infty, \tau_*$ die Zusammenhänge der Fundamentalsysteme $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_\infty$ sowie das Monodromieverhalten zu beschreiben.

6.1 Zusammenhangsproblem zwischen $\mathcal{F}_0$ und $\mathcal{F}_1$

(6.1) Bemerkung, Definition:
Für $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ *gilt*

$$\exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right)\frac{\sin(\pi\alpha_1)}{\pi}\mathcal{F}_0(p,\cdot) = \mathcal{F}_1(p,\cdot) \circ \mathbf{Q}_{01}(p),$$

wobei

$$\mathbf{Q}_{01} := \begin{pmatrix} -q \circ \tau_1 & -q \circ \tau_0 \circ \tau_1 \\ q & q \circ \tau_0 \end{pmatrix}$$

mit $q(p) := \exp\left(\frac{\gamma}{2}\right)[\Phi, t_{01}\Phi](p)$.
Beweis: Aufgrund von (4.17) gilt

$$x(p)\mathcal{F}_0(p,\cdot) = \mathcal{F}_1(p,\cdot)\mathbf{Q}_{01}(p), \tag{6.2}$$

mit

$$\mathbf{Q}_{01}(p) := \begin{pmatrix} q_{11}(p) & q_{12}(p) \\ q(p) & q_{22}(p) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{\gamma}{2}\right)[t_{01}t_0\Phi, \Phi](p) & \exp\left(\frac{\gamma}{2}\right)[t_{01}t_0\Phi, t_0\Phi](p) \\ \exp\left(\frac{\gamma}{2}\right)[\Phi, t_{01}\Phi](p) & \exp\left(\frac{\gamma}{2}\right)[t_0\Phi, t_{01}\Phi](p) \end{pmatrix}$$

und $x(p) := -\exp\left(\frac{\gamma}{2}\right)[t_{01}\Phi, t_{01}t_0\Phi](p) \overset{(5.7ii)}{=} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right)\dfrac{\sin(\pi\alpha_1)}{\pi}$.
Nun stellen wir alle q_{11}, q_{12}, q_{22} mit Hilfe von q dar:

1. Wir wenden t_0 auf die Gleichung (6.2) an und erhalten mit (5.19):

$$(x \circ \tau_0)\mathcal{F}_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = t_0(x\mathcal{F}_0) \quad = \quad t_0(\mathcal{F}_1 \circ \mathbf{Q}_{01}) = \mathcal{F}_1 \circ (\mathbf{Q}_{01} \circ \tau_0).$$

   Mit $x \circ \tau_0 = x$ folgt

$$\begin{aligned} x\mathcal{F}_0 &= \mathcal{F}_1 \circ (\mathbf{Q}_{01} \circ \tau_0)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{F}_1 \begin{pmatrix} q_{11} \circ \tau_0 & q_{12} \circ \tau_0 \\ q \circ \tau_0 & q_{22} \circ \tau_0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{F}_1 \begin{pmatrix} q_{12} \circ \tau_0 & q_{11} \circ \tau_0 \\ q_{22} \circ \tau_0 & q \circ \tau_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Wir wenden t_1 auf die Gleichung (6.2) an und erhalten mit (5.19):

$$(x \circ \tau_1)\mathcal{F}_0 = t_1(x\mathcal{F}_0) \quad = \quad t_1(\mathcal{F}_1 \circ \mathbf{Q}_{01}) = \mathcal{F}_1 \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \circ (\mathbf{Q}_{01} \circ \tau_1).$$

Mit $x \circ \tau_1 = -x$ folgt

$$\begin{aligned} x\mathcal{F}_0 = -\mathcal{F}_1 \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \circ (\mathbf{Q}_{01} \circ \tau_1) =& \mathcal{F}_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -q_{11} \circ \tau_1 & -q_{12} \circ \tau_1 \\ -q \circ \tau_1 & -q_{22} \circ \tau_1 \end{pmatrix} \\ =& \mathcal{F}_1 \begin{pmatrix} -q \circ \tau_1 & -q_{22} \circ \tau_1 \\ -q_{11} \circ \tau_1 & -q_{12} \circ \tau_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit gilt: $q_{11} = -q \circ \tau_1$ und $q_{22} = q \circ \tau_0 = -q_{12} \circ \tau_1$. Hieraus folgt $q_{12} = -q \circ \tau_0 \circ \tau_1$. $\square$

Das Zusammenhangsproblem ist also dann gelöst, wenn sich die Funktion q berechnen lässt. In [17] haben die Autoren in Abschnitt (0.2) Satz (2.15) eine Limesformel für q angegeben.
Wenden wir diesen Satz auf unsere Situation an, so erhalten wir

(6.3) Satz:
Seien a_n $(n \in \mathbb{N})$ wie in (5.1) und q wie in (6.1).
Dann gilt für $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$:

$$\begin{aligned} &\exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right) \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha_0)\Gamma(k-\alpha_1)} a_k(p) \\ =& q(p) \left(1 + \sum_{l=1}^{m} a_l(\tau_0 \circ \tau_\infty \circ \tau_{01}(p)) \prod_{\sigma=1}^{l} (\sigma + \alpha_1 - k)^{-1}\right) + \mathcal{O}(k^{-m-1}) \end{aligned} \tag{6.4}$$

für $k \to \infty$, wobei $m \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt werden kann. Speziell erhält man:

$$q\,(p) = \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right) \lim_{k\to\infty} k^{1+\alpha_0+\alpha_1} \frac{a_k\,(p)}{k!} \tag{6.5}$$

lokal gleichmäßig in Λ.
Beweis:
Aus [17], Abschnitt (0.2), Satz (2.15) entnehmen wir (6.4) sowie die Limesformel

$$\exp\left(\frac{\gamma}{2}\right) q(p) = \lim_{k\to\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha_0)\Gamma(k-\alpha_1)} a_k(p)$$

und erhalten dann über die Stirlingformel

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{\gamma}{2}\right) q(p) &= \lim_{k\to\infty} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha_0)\Gamma(k-\alpha_1)} \frac{a_k(p)}{\Gamma(k+1)} \\ &= \lim_{k\to\infty} k^{1+\alpha_0+\alpha_1} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)\right) \frac{a_k(p)}{\Gamma(k+1)} = \lim_{k\to\infty} k^{1+\alpha_0+\alpha_1} \frac{a_k\,(p)}{k!}. \end{aligned}$$

$\square$

(6.6) Bemerkung (Transformationseigenschaften von q):
Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ und q die in (6.1) definierte Funktion.

i) Es gilt $q \circ \tau_\infty = q \circ \tau_{01} = q \circ \tau_* = q$.

ii) $q : \Lambda \to \mathbb{C}$ ist partiell holomorph. Da q bezüglich τ_∞ invariant ist, lässt sich q bezüglich des Parameters $\hat{\gamma} \in \widehat{\mathbb{C}^*}$ als eine holomorphe Funktion in γ^2 auffassen.

iii) Es gilt $\det \mathbf{Q}_{01}(p) = -\dfrac{\sin(\pi\alpha_0)\sin(\pi\alpha_1)}{\pi^2}$.
Im Fall $\alpha_0, \alpha_1 \notin \mathbb{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q}_{01}^{-1}(p) =& \frac{\pi^2}{\sin(\pi\alpha_0)\sin(\pi\alpha_1)} \left(\mathbf{Q}_{01} \circ \tau_{01}(p)\right) \\
=& \frac{\pi^2}{\sin(\pi\alpha_0)\sin(\pi\alpha_1)} \begin{pmatrix} -q \circ \tau_0(p) & -q \circ \tau_0 \circ \tau_1(p) \\ q(p) & q \circ \tau_1(p) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Beweis:
Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$.
Zu i): Als erstes betrachten wir die Invarianz von q bezüglich der Transformation τ_∞. Mit (4.19), (4.6) und (5.19) folgt:

$$\begin{aligned}
q(p) &= \exp\left(\frac{\gamma}{2}\right)[\Phi, t_{01}\Phi](p) \overset{(5.19)}{=} \exp\left(\frac{\gamma}{2}\right)[t_\infty\Phi, t_{01}t_\infty\Phi](p) \\
&\overset{(4.6)}{=} \exp\left(\frac{\gamma}{2}\right)\exp(-\gamma)[t_\infty\Phi, t_\infty t_{01}\Phi](p) \overset{(4.19)}{=} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right)\left([\Phi, t_{01}\Phi] \circ \tau_\infty(p)\right) \\
&= q \circ \tau_\infty(p).
\end{aligned}$$

Ferner folgt mit der Limesformel (6.5):

$$\begin{aligned}
q(p) &= \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right)\lim_{k\to\infty} k^{1+\alpha_0+\alpha_1}\frac{a_k(p)}{\Gamma(k+1)} \\
&\overset{(5.20)}{=} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right)\lim_{k\to\infty} k^{1+\alpha_0^*(p)+\alpha_1^*(p)}\frac{a_k(\tau_*(p))}{\Gamma(k+1)} = q(\tau_*(p)).
\end{aligned}$$

Aufgrund von (4.8) gilt $\tau_{01} = \tau_* \circ \tau_\infty^{-1} \circ \tau_*$ und somit

$$q \circ \tau_{01} = q \circ \tau_* \circ \tau_\infty^{-1} \circ \tau_* = q.$$

Zu ii): Die partielle Holomorphie von q folgt aus (4.17) und der partiellen Holomorphie von Φ und $t_{01}\Phi$.
Zu iii): Sei $x(p) := \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right)\frac{\sin(\pi\alpha_1)}{\pi}$. Mit $t_{01}\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_1$ und $t_{01}\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0$ folgt:

$$(x \circ \tau_{01})\mathcal{F}_1 = t_{01}(x\mathcal{F}_0) = t_{01}\left(\mathcal{F}_1 \circ \mathbf{Q}_{01}\right) = \mathcal{F}_0 \circ \left(\mathbf{Q}_{01} \circ \tau_{01}\right)$$

und somit $x \cdot (x \circ \tau_{01})\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1 \circ \mathbf{Q}_{01} \circ (\mathbf{Q}_{01} \circ \tau_{01})$.
Hieraus folgt im Fall $\alpha_0, \alpha_1 \neq \mathbb{Z}$: $\mathbf{Q}_{01}^{-1} = \frac{1}{x \cdot (x \circ \tau_{01})} \mathbf{Q}_{01} \circ \tau_{01}$ und

$$\begin{aligned}
&\exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right) \exp\left(\frac{\gamma}{2}\right) \frac{\sin(\pi\alpha_1)\sin(\pi\alpha_0)}{\pi^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_{01}(p) \circ (\mathbf{Q}_{01} \circ \tau_{01}(p)) \\
&\overset{i)}{=} \begin{pmatrix} -q \circ \tau_1(p) & -q \circ \tau_0 \circ \tau_1(p) \\ q(p) & q \circ \tau_0(p) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -q \circ \tau_0(p) & -q \circ \tau_0 \circ \tau_1(p) \\ q(p) & q \circ \tau_1(p) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\det \mathbf{Q}_{01}(p) = -(q \circ \tau_1)(p)(q \circ \tau_0)(p) + q(p)(q \circ \tau_0 \circ \tau_1)(p) = -\frac{\sin(\pi\alpha_1)\sin(\pi\alpha_0)}{\pi^2}.$$

□

Nun stellen wir den Zusammenhang zwischen $\tilde{q}$ und q her. Der Beweis ist analog zu dem Beweis von D.Schmidt und G.Wolf in [12], Seite 153, 154 im Abschnitt[C].

(6.7) Bemerkung (Zusammenhang von q und $\tilde{q}$):
$\tilde{q}$ aus (5.34) und q aus (6.1) erfüllen mit $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$:

$$\begin{aligned}
\tilde{q}(p) &= 2\pi i \exp\left(i\pi\alpha_1^*(p) + \frac{\gamma}{2}\right) q \circ \tau_0 \circ \tau_*(p), \\
\tilde{q} \circ \tau_\infty(p) &= 2\pi i \exp\left(i\pi\alpha_0^*(p) - \frac{\gamma}{2}\right) q \circ \tau_1 \circ \tau_*(p)
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
-\frac{\exp(-i\pi(\alpha_0+\alpha_1))}{4\pi^2} \tilde{q}(p) \cdot \tilde{q} \circ \tau_\infty(p) - \frac{\sin(\pi\alpha_0^*(p))\sin(\pi\alpha_1^*(p))}{\pi^2} \\
= q \circ \tau_0(p) \cdot q \circ \tau_1(p) - \frac{\sin(\pi\alpha_0)\sin(\pi\alpha_1)}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

Beweis:
Sei $\mathrm{Re}(\alpha_1^*(p)) < 1$ und $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ vorausgesetzt. Dann gibt es nach (5.28) folgende Darstellung für $t_\infty \Psi$.
Für $\hat{z} \in H_{\pi-\varepsilon-\arg(\delta_\pi(\hat{\gamma}))} = H_{-\varepsilon-\arg(\hat{\gamma})}$ gilt:

$$\begin{aligned}
&(t_\infty \Psi)(p, \hat{z}) = \exp(\gamma z) \Psi(\tau_\infty(p), \hat{z}) \\
&= -\exp(i\pi\alpha_0^*(\tau_\infty(p))) \\
&\quad \int_{L_0^\varepsilon} \exp(\gamma z T \circ P(\cdot)) \varpi(-\alpha_0^*(\tau_\infty(p)), -\alpha_1^*(\tau_\infty(p)), \gamma, \cdot) \Phi(\tau_*(\tau_\infty(p)), \cdot) \\
&= -\exp(i\pi\alpha_1^*(p)) \\
&\quad \int_{L_0^\varepsilon} \exp(\gamma z T \circ P(\cdot)) \varpi(-\alpha_1^*(p), -\alpha_0^*(p), \gamma, \cdot) \Phi(\tau_{01} \circ \tau_*(p), \cdot).
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt aufgrund von $\tau_* \circ \tau_\infty = \tau_{01}^{-1} \circ \tau_*$ (vgl. (4.8)3.(a)) und $t_{01}^{-1}\mathcal{F}_0 = t_{01}t_\infty^2\mathcal{F}_0 = t_{01}\mathcal{F}_0$ (vgl. (4.6)vi), (5.19)ii)).
Mit

$$u\left(p, \hat{z}, \hat{t}\right) := \exp\left(\gamma z(1-t)\right) \varpi\left(-\alpha_1^*\left(p\right), -\alpha_0^*\left(p\right), \gamma, \hat{t}\right) \Phi\left(\tau_{01} \circ \tau_*(p), \hat{z}\right) \quad (\hat{z}, \hat{t} \in \widehat{\Omega})$$

gilt

$$u\left(p, \hat{z}, d_0\left(\hat{t}\right)\right) = \exp\left(-2\pi i \alpha_1^*(p)\right) u\left(p, \hat{z}, \hat{t}\right)$$

und somit

$$\begin{aligned}
\left(t_\infty \Psi\right)\left(p, \hat{z}\right) &= -\exp\left(i\pi\alpha_1^*\left(p\right)\right) \int\limits_{L_0^\varepsilon} u\left(p, \hat{z}, \cdot\right) \\
&= -\exp\left(i\pi\alpha_1^*\left(p\right)\right) \exp\left(2\pi i \alpha_1^*(p)\right) \int\limits_{L_0^\varepsilon} u\left(p, \hat{z}, d_0\left(\cdot\right)\right) \\
&= -\exp\left(3\pi i \alpha_1^*\left(p\right)\right) \int\limits_{d_0 \circ L_0^\varepsilon} u\left(p, \hat{z}, \cdot\right).
\end{aligned}$$

Ferner haben wir für $\hat{z} \in H_{\pi+\varepsilon-2\pi-\arg(\delta_{-\pi}(\hat{\gamma}))} = H_{\varepsilon-\arg(\hat{\gamma})}$ wegen (5.29) und (5.28):

$$-\exp\left(-i\pi\alpha_1^*(p)\right) \tilde{\Psi}\left(p, \hat{z}\right) = \left(t_\infty^{-1}\Psi\right)\left(p, \hat{z}\right) = -\exp\left(i\pi\alpha_1^*\left(p\right)\right) \int\limits_{L_0^{2\pi-\varepsilon}} u\left(p, \hat{z}, \cdot\right).$$

Nun gilt aufgrund des Cauchyschen Integralsatzes für
$\hat{z} \in H_{\varepsilon-\arg(\hat{\gamma})} \cap H_{-\varepsilon-\arg(\hat{\gamma})} \subset H_{-\arg(\hat{\gamma})}$:

$$\begin{aligned}
\left(t_\infty \Psi\right)\left(p, \hat{z}\right) &= -\exp\left(3\pi i \alpha_1^*\left(p\right)\right) \int\limits_{d_0 \circ L_0^\varepsilon} u\left(p, \hat{z}, \cdot\right) \\
&= -\exp\left(3\pi i \alpha_1^*\left(p\right)\right) \left(\int\limits_{L_0^{2\pi-\varepsilon}} - \int\limits_{d_0 \circ S_1^0} \right) u\left(p, \hat{z}, \cdot\right) \\
&= -\exp\left(\pi i \alpha_1^*\left(p\right)\right) \tilde{\Psi}\left(p, \hat{z}\right) + \exp\left(3\pi i \alpha_1^*\left(p\right)\right) \int\limits_{d_0 \circ S_1^0} u\left(p, \hat{z}, \cdot\right) \\
&= -\exp\left(i\pi\alpha_1^*\left(p\right)\right) \tilde{\Psi}\left(p, \hat{z}\right) + \exp\left(\pi i \alpha_1^*(p)\right) \int\limits_{S_1^0} u\left(p, \hat{z}, \cdot\right).
\end{aligned}$$

Analog zu (4.16) folgt für $\hat{z} \in H_{\varepsilon-\arg(\hat{\gamma})} \cap H_{-\varepsilon-\arg(\hat{\gamma})}$

$$\int\limits_{S_1^0} u\left(p, \hat{z}, \cdot\right) = \int\limits_{d_1 \circ S_1^0} u\left(p, \hat{z}, d_1^{-1}(\cdot)\right) = \int\limits_{\hat{T} \circ S_0^\pi} u\left(p, \hat{z}, d_1^{-1}(\cdot)\right)$$

und mit $d_1^{-1} \circ \hat{T} = \hat{T} \circ d_0^{-1}$ (vgl. (2.18)) weiter

$$= \int\limits_{d_1^{-1}\circ\hat{T}\circ S_0^\pi} u(p,\hat{z},\cdot) = \int\limits_{\hat{T}\circ d_0^{-1}\circ S_0^\pi} u(p,\hat{z},\cdot) = -\int\limits_{d_0^{-1}\circ S_0^\pi} u\left(p,\hat{z},\hat{T}(\cdot)\right).$$

Für $\hat{z}, \hat{t} \in \widehat{\Omega}$ gilt:

$$\begin{aligned} u\left(p,\hat{z},\hat{T}\left(\hat{t}\right)\right) &= \exp(\gamma z t)\,\varpi\left(-\alpha_1^*(p), -\alpha_0^*(p), \gamma, \hat{T}\left(\hat{t}\right)\right)\Phi\left(\tau_{01}\circ\tau_*(p), \hat{T}\left(\hat{t}\right)\right) \\ &= \exp(\gamma z t)\exp(\gamma)\varpi\left(-\alpha_0^*(p), -\alpha_1^*(p), -\gamma, \hat{t}\right)(t_{01}\Phi)\left(\tau_*(p), \hat{t}\right) \end{aligned}$$

und aufgrund von (6.6)iii) gilt für $\hat{z} \in \widehat{\Omega}$ und $\alpha_0^*(p) \notin \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} (t_{01}\Phi)(\tau_*(p),\hat{z}) = &-\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha_0^*(p))}\exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right) q\circ\tau_0\circ\tau_*(p)\Phi(\tau_*(p),\hat{z}) \\ &+\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha_0^*(p))}\exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right) q\circ\tau_*(p)\,(t_0\Phi)(\tau_*(p),\hat{z}). \end{aligned}$$

und somit für $\hat{z} \in H_{\varepsilon-\arg(\hat{\gamma})} \cap H_{-\varepsilon-\arg(\hat{\gamma})} \subset H_{-\arg(\hat{\gamma})}$, $\mathrm{Re}(\alpha_1^*(p)) < 1$ und $\alpha_0^*(p) \notin \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \int\limits_{S_1^0} u(p,\hat{z},\cdot) = &\exp(\gamma)\exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right) q\circ\tau_0\circ\tau_*(p) \\ &\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha_0^*(p))}\int\limits_{d_0^{-1}\circ S_0^\pi}\exp(\gamma z t)\,\varpi(-\alpha_0^*(p), -\alpha_1^*(p), -\gamma, \cdot)\,\Phi(\tau_*(p),\cdot) \\ =&2\pi i\exp\left(\frac{\gamma}{2}\right) q\circ\tau_0\circ\tau_*(p) \\ &\frac{\exp(2\pi i\alpha_0^*(p))}{2i\sin(\pi\alpha_0^*(p))}\int\limits_{S_0^\pi}\exp(\gamma z t)\,\varpi(-\alpha_0^*(p), -\alpha_1^*(p), -\gamma, \cdot)\,\Phi(\tau_*(p),\cdot) \\ =&2\pi i\exp\left(\frac{\gamma}{2}\right) q\circ\tau_0\circ\tau_*(p)\Psi(p,\cdot). \end{aligned}$$

Mit dem Identitätssatz folgt damit die erste Behauptung.
Ferner gilt mit (6.6)i) und den Regeln aus (4.8) und (4.5):

$$q\circ\tau_0\circ\tau_*\circ\tau_\infty = q\circ\tau_0\circ\tau_{01}^{-1}\circ\tau_* = q\circ\tau_{01}^{-1}\circ\tau_1\circ\tau_* = q\circ\tau_1\circ\tau_*.$$

Dies liefert die zweite Behauptung. Nun zeigen wir die letzte Aussage der Bemerkung. Hierzu zeigen wir die Invarianz von

$$(q\circ\tau_0)\cdot(q\circ\tau_1) - \frac{\sin(\pi\alpha_0)\sin(\pi\alpha_1)}{\pi^2}$$

bezüglich τ_*. Dann folgt die Behauptung aus dem schon Gezeigten. Mit Hilfe von (6.6)iii) gilt

$$q\cdot(q\circ\tau_0\circ\tau_1) = (q\circ\tau_0)\cdot(q\circ\tau_1) - \frac{\sin(\pi\alpha_0)\sin(\pi\alpha_1)}{\pi^2}.$$

Da $q \circ \tau_* = q$ gilt, müssen wir nur noch die Invarianz von $q \circ \tau_0 \circ \tau_1$ bezüglich τ_* zeigen. Aus (6.6)i) und den Regeln aus (4.8) und (4.5) folgt:

$$q \circ \tau_0 \circ \tau_1 = q \circ \tau_{01} \circ \tau_0 \circ \tau_1 \circ \tau_\infty = q \circ \tau_* \circ \tau_0 \circ \tau_1 \circ \tau_* = q \circ \tau_0 \circ \tau_1 \circ \tau_*. \tag{6.8}$$

$\square$

Wir kommen nun zu den komplizierteren Zusammenhangsproblemen.

6.2 Zusammenhangsproblem zwischen $\mathcal{F}_{0/1}$ und $\mathcal{F}_\infty$

Als erstes untersuchen wir den Zusammenhang von $\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_\infty$.

(6.9) Bemerkung:

$\mathcal{F}_1$ und $\mathcal{F}_\infty$ aus (5.7) und (5.30) erfüllen:

$$c\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_\infty \circ \mathbf{Q}_{1\infty}, \tag{6.10}$$

wobei c und $\mathbf{Q}_{1\infty}$ für $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ wie folgt definiert werden:
$c(p) := \exp\left(i\frac{\pi}{2}\left(\alpha_1 + \frac{\beta_0+\beta_1}{\gamma}\right)\right)\exp\left(\frac{\gamma}{2}\right)\hat{\gamma}^{\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}}$ *und*

$$\mathbf{Q}_{1\infty} \quad := \quad \begin{pmatrix} -\zeta \circ \tau_\infty^{-1} & -\zeta \circ \tau_\infty^{-1} \circ \tau_1 \\ \zeta & \zeta \circ \tau_1 \end{pmatrix}$$

mit $\zeta(p) := \exp\left(i\frac{\pi}{2}\left(-\alpha_1 + \frac{\beta_0+\beta_1}{\gamma}\right)\right)\exp\left(\frac{\gamma}{2}\right)\hat{\gamma}^{\frac{-\alpha_0-\alpha_1}{2}+1} \cdot [t_{01}\Phi, \Psi](p)$.

Beweis:

Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$. Da $\mathcal{F}_\infty(p, \cdot)$ aufgrund von (5.30) ein Fundamentalsystem von $L(p)\eta = 0$ ist, so existiert eine Zusammenhangsmatrix $\mathbf{Q}_{1\infty}(p)$ mit

$$c\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_\infty \begin{pmatrix} \zeta_1 & \zeta_3 \\ \zeta & \zeta_4 \end{pmatrix} =: \mathcal{F}_\infty \circ \mathbf{Q}_{1\infty}. \tag{6.11}$$

Wenden wir hierauf die Transformation t_1 an, erhalten wir mit Hilfe von (5.33):

$$\begin{aligned} (c \circ \tau_1)(p)\mathcal{F}_1(p, \cdot)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= (c \circ \tau_1)(p)t_1\mathcal{F}_1(p, \cdot) = t_1\mathcal{F}_\infty(p, \cdot)\left(\mathbf{Q}_{1\infty} \circ \tau_1\right)(p) \\ &= \exp\left(-i\pi\alpha_1\right)\hat{\gamma}^{-\alpha_1}\mathcal{F}_\infty(p, \cdot)\left(\mathbf{Q}_{1\infty} \circ \tau_1\right)(p). \end{aligned}$$

Da $(c \circ \tau_1)(p) = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\left(-\alpha_1 + \frac{\beta_0+\beta_1}{\gamma}\right) + \frac{\gamma}{2}\right)\hat{\gamma}^{\frac{-\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_0}{2}} = \exp\left(-i\pi\alpha_1\right)\hat{\gamma}^{-\alpha_1}c(p)$, folgt

$$c\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_\infty\left(\mathbf{Q}_{1\infty} \circ \tau_1\right) \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{F}_\infty \begin{pmatrix} \zeta_3 \circ \tau_1 & \zeta_1 \circ \tau_1 \\ \zeta_4 \circ \tau_1 & \zeta \circ \tau_1 \end{pmatrix}. \tag{6.12}$$

Wenden wir die Transformation t_∞ auf (6.11) an, so erhalten wir:

$$(c \circ \tau_\infty)t_\infty\mathcal{F}_1 = t_\infty\mathcal{F}_\infty\left(\mathbf{Q}_{1\infty} \circ \tau_\infty\right).$$

Aufgrund von (5.33) gilt:

$$t_\infty \mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}_\infty \circ Q_\infty = \mathcal{F}_\infty \circ \begin{pmatrix} \tilde{q} & -\exp(i\pi\alpha_0^*) \\ -\exp(i\pi\alpha_1^*) & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Bemerkung (5.19) gilt $t_\infty \mathcal{F}_1(p,\cdot) = \exp(\gamma)\,\mathcal{F}_1(p,\cdot)$. Somit folgt:

$$\begin{aligned}(c\circ\tau_\infty)(p)\exp(\gamma)\,\mathcal{F}_1(p,\cdot) =& (c\circ\tau_\infty)(p) t_\infty \mathcal{F}_1(p,\cdot) = t_\infty\mathcal{F}_\infty(p,\cdot)\circ(\mathbf{Q}_{1\infty}\circ\tau_\infty)(p)\\ =& \mathcal{F}_\infty(p,\cdot)\circ Q_\infty(p)\circ(\mathbf{Q}_{1\infty}\circ\tau_\infty)(p).\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}Q_\infty\circ(\mathbf{Q}_{1\infty}\circ\tau_\infty) =& \begin{pmatrix} \tilde{q} & -\exp(i\pi\alpha_0^*) \\ -\exp(i\pi\alpha_1^*) & 0 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} \zeta_1\circ\tau_\infty & \zeta_3\circ\tau_\infty \\ \zeta\circ\tau_\infty & \zeta_4\circ\tau_\infty\end{pmatrix} \qquad (6.13)\\ =& \begin{pmatrix} \tilde{q}(\zeta_1\circ\tau_\infty) - \exp(i\pi\alpha_0^*)(\zeta\circ\tau_\infty) & \tilde{q}(\zeta_3\circ\tau_\infty)-\exp(i\pi\alpha_0^*)(\zeta_4\circ\tau_\infty) \\ -\exp(i\pi\alpha_1^*)(\zeta_1\circ\tau_\infty) & -\exp(i\pi\alpha_1^*)(\zeta_3\circ\tau_\infty)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Weiter folgt

$$\begin{aligned}(c\circ\tau_\infty)(p) =& \exp\left(i\frac{\pi}{2}\left(\alpha_1 - \frac{\beta_0+\beta_1}{\gamma}\right) - \frac{\gamma}{2}\right)(\delta_\pi(\hat{\gamma}))^{\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}}\\ =& \exp\left(i\pi\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}\right)\exp\left(-i\pi\left(\frac{\beta_0+\beta_1}{\gamma}\right)\right)\exp(-\gamma)\,c(p)\\ \overset{(4.7)}{=}& \exp(i\pi\alpha_1^*(p))\exp(-\gamma)\cdot c(p).\end{aligned}$$

Also erhalten wir

$$c\mathcal{F}_1 = \exp(-i\pi\alpha_1^*)\,\mathcal{F}_\infty\circ Q_\infty\circ(\mathbf{Q}_{1\infty}\circ\tau_\infty). \qquad (6.14)$$

Damit gilt für $\mathbf{Q}_{1\infty}$ mit (6.12) und (6.13):

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{1\infty} =& \begin{pmatrix}\zeta_1 & \zeta_3 \\ \zeta & \zeta_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\zeta_3\circ\tau_1 & \zeta_1\circ\tau_1 \\ \zeta_4\circ\tau_1 & \zeta\circ\tau_1\end{pmatrix}\\ =& \exp(-i\pi\alpha_1^*)\begin{pmatrix} \tilde{q}(\zeta_1\circ\tau_\infty) - \exp(i\pi\alpha_0^*)(\zeta\circ\tau_\infty) & \tilde{q}(\zeta_3\circ\tau_\infty)-\exp(i\pi\alpha_0^*)(\zeta_4\circ\tau_\infty) \\ -\exp(i\pi\alpha_1^*)(\zeta_1\circ\tau_\infty) & -\exp(i\pi\alpha_1^*)(\zeta_3\circ\tau_\infty)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Damit ist $\zeta_4 = \zeta\circ\tau_1$, $\zeta = -\zeta_1\circ\tau_\infty$, $\zeta\circ\tau_1 = -\zeta_3\circ\tau_\infty$ und

$$\zeta_1 = \exp(-i\pi\alpha_1^*)\,\tilde{q}\cdot(\zeta_1\circ\tau_\infty) - \exp(i\pi(\alpha_0^*-\alpha_1^*))\,(\zeta\circ\tau_\infty). \qquad (6.15)$$

Aus $\zeta = -\zeta_1\circ\tau_\infty$ folgt $\zeta_1 = -\zeta\circ\tau_\infty^{-1}$ und aus $\zeta\circ\tau_1 = -\zeta_3\circ\tau_\infty$ folgt $\zeta_3 = -\zeta\circ\tau_1\circ\tau_\infty^{-1}$.
Damit erhalten wir die Darstellung von $\mathbf{Q}_{1\infty}$ in (6.9).
Aufgrund von Bemerkung (4.17) gilt andererseits:

$$[\Psi,\tilde{\Psi}]\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_\infty\circ\begin{pmatrix}[t_{01}\Phi,\tilde{\Psi}] & [t_{01}t_0\Phi,\tilde{\Psi}] \\ [\Psi,t_{01}\Phi] & [\Psi,t_{01}t_0\Phi]\end{pmatrix}.$$

Mit (5.30) und $[\Psi, t_{01}\Phi] = -[t_{01}\Phi, \Psi]$ folgt dann

$$\begin{aligned}\zeta(p) = c(p)\frac{[\Psi, t_{01}\Phi](p)}{[\Psi, \tilde{\Psi}](p)} &= \exp\left(i\frac{\pi}{2}\left(\alpha_1 + \frac{\beta_0+\beta_1}{\gamma}\right)\right)\exp\left(\frac{\gamma}{2}\right)\hat{\gamma}^{\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}}\frac{[\Psi, t_{01}\Phi](p)}{[\Psi, \tilde{\Psi}](p)}\\ &= -\exp\left(-i\pi\alpha_1\right)\hat{\gamma}^{1-\alpha_0-\alpha_1}\exp\left(i\frac{\pi}{2}\left(\alpha_1 + \frac{\beta_0+\beta_1}{\gamma}\right)\right)\exp\left(\frac{\gamma}{2}\right)\hat{\gamma}^{\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}}[\Psi, t_{01}\Phi](p)\\ &= \exp\left(i\frac{\pi}{2}\left(-\alpha_1 + \frac{\beta_0+\beta_1}{\gamma}\right)\right)\exp\left(\frac{\gamma}{2}\right)\hat{\gamma}^{\frac{-\alpha_0-\alpha_1}{2}+1}[t_{01}\Phi, \Psi](p).\end{aligned}$$

□

Nun untersuchen wir den Zusammenhang von $\mathcal{F}_0$ und $\mathcal{F}_\infty$.

(6.16) Bemerkung:

$\mathcal{F}_0$ und $\mathcal{F}_\infty$ aus (5.7) und (5.30) erfüllen

$$c(p)\mathcal{F}_0\left(p, \hat{z}\right) = \mathcal{F}_\infty\left(p, \hat{z}\right) \circ \mathbf{Q}_{0\infty}(p),$$

mit c aus (6.9) und $\mathbf{Q}_{0\infty}$ für $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ definiert wird durch:

$\mathbf{Q}_{0\infty}(p) :=$

$$\begin{pmatrix} -\exp(\gamma)\exp(-i\pi\alpha_0)\left(\zeta \circ \tau_{01}^{-1} \circ \tau_\infty^{-1}\right)(p) & -\exp(\gamma)\exp(i\pi\alpha_0)\left(\zeta \circ \tau_{01}^{-1} \circ \tau_\infty^{-1} \circ \tau_0\right)(p) \\ \exp(-i\pi\alpha_0)\left(\zeta \circ \tau_{01}^{-1}\right)(p) & \exp(i\pi\alpha_0)\left(\zeta \circ \tau_{01}^{-1} \circ \tau_0\right)(p) \end{pmatrix}.$$

Beweis:

Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$.

In (5.33) haben wir $\left(t_{01}\mathcal{F}_\infty\right)(p, \cdot) = \left(\phi_1^{-1}\mathcal{F}_\infty\right)(p, \cdot) \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(-\gamma) \end{pmatrix}$ gezeigt. Aufgrund von (4.6) gilt $t_{01} \circ \phi_0 = \phi_1 \circ t_{01}$. Daher folgt

$$\left(t_{01}\phi_0\mathcal{F}_\infty\right)(p, \cdot) = \left(\phi_1 t_{01}\mathcal{F}_\infty\right)(p, \cdot) = \mathcal{F}_\infty(p, \cdot) \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(-\gamma) \end{pmatrix}$$

und somit $\mathcal{F}_\infty(p, \cdot) = \left(\phi_0^{-1}t_{01}^{-1}\mathcal{F}_\infty\right)(p, \cdot) \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(\gamma) \end{pmatrix}$.

Damit erhalten wir aus dem gerade Gezeigten und (6.10):

$$\begin{aligned}&\left(c \circ \tau_{01}^{-1}\right)(p)\left(\phi_0^{-1}\mathcal{F}_0\right)(p, \cdot) = \left(c \circ \tau_{01}^{-1}\right)(p)\left(\phi_0^{-1}t_{01}^{-1}\mathcal{F}_1\right)(p, \cdot)\\ &= \left(\phi_0^{-1}t_{01}^{-1}\mathcal{F}_\infty\right) \circ \left(\mathbf{Q}_{1\infty} \circ \tau_{01}^{-1}\right)(p) = \mathcal{F}_\infty \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(-\gamma) \end{pmatrix} \circ \left(\mathbf{Q}_{1\infty} \circ \tau_{01}^{-1}\right)(p).\end{aligned}$$

Ferner gilt $\left(\phi_0^{-1}\mathcal{F}_0\right)(p, \cdot) = \mathcal{F}_0(p, \cdot)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(-2\pi i\alpha_0) \end{pmatrix}$ und

$$\begin{aligned}\left(c \circ \tau_{01}^{-1}\right)(p) &= \exp\left(i\frac{\pi}{2}\left(\alpha_0 + \frac{\beta_0+\beta_1}{\gamma}\right)\right)\exp\left(\frac{-\gamma}{2}\right)\left(\delta_\pi\left(\hat{\gamma}\right)\right)^{\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}}\\ &= \exp\left(i\frac{\pi}{2}\left(\alpha_0 + \frac{\beta_0+\beta_1}{\gamma}\right)\right)\exp\left(\frac{-\gamma}{2}\right)\hat{\gamma}^{\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}}\exp\left(i\frac{\pi}{2}\left(\alpha_0+\alpha_1\right)\right)\\ &= \exp\left(i\pi\alpha_0\right)\exp\left(-\gamma\right)c(p).\end{aligned}$$

Damit erhält man

$$c(p)\mathcal{F}_0(p,\cdot) = \mathcal{F}_\infty \circ \begin{pmatrix} \exp(\gamma) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \left(\mathbf{Q}_{1\infty} \circ \tau_{01}^{-1}\right)(p) \circ \begin{pmatrix} \exp(-\pi i \alpha_0) & 0 \\ 0 & \exp(\pi i \alpha_0) \end{pmatrix}$$

und aufgrund der Regeln in (4.5) die Behauptung. □

In der nun folgenden Bemerkung geben wir einige Eigenschaften von ζ und $\mathbf{Q}_{1\infty}$ an.

(6.17) Bemerkung:

Seien ζ und $\mathbf{Q}_{1\infty}$ aus (6.9) und $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$, so gilt:

i) *$\zeta : \Lambda \to \mathbb{C}$ ist eine partiell holomorphe Funktion, welche bezüglich $\hat{\gamma} \in \widehat{\mathbb{C}^*}$ folgendes Monodromieverhalten hat:*

$$\zeta \circ \tau_\infty^2 = \exp\left(i\pi(\alpha_0^* - \alpha_1^*)\right)\zeta - \exp\left(-i\pi\alpha_1^*\right)(\tilde{q} \circ \tau_\infty)(\zeta \circ \tau_\infty).$$

ii) *Es gilt $\zeta = \zeta \circ \tau_0$. Damit ist ζ bezüglich der ersten Komponente $\alpha_0 \in \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion in α_0^2.*

iii) *Es gilt $\zeta \circ \tau_1 = \zeta \circ \tau_1 \circ \tau_*$.*

iv) *Es gilt*

$$\begin{aligned}
&\frac{\exp\left(i\pi\alpha_1^*(p)\right)\sin(\pi\alpha_0)\sin(\pi\alpha_1)}{\pi^2}\tilde{q} \circ \tau_\infty(p) \cdot \zeta \circ \tau_\infty^{-1}(p) \\
=&\left(q \circ \tau_1(p) \cdot q \circ \tau_0(p) - q(p) \cdot q \circ \tau_0 \circ \tau_1(p)\exp(2\pi i\alpha_0) - \exp\left(2\pi i \alpha_1^*(p)\right)\right)\zeta(p) \\
&+ \exp(2\pi i\alpha_1)\left(\exp(2\pi i\alpha_0) - 1\right) q(p) \cdot q \circ \tau_0(p) \cdot \zeta \circ \tau_1(p)
\end{aligned} \tag{6.18}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&\frac{\exp\left(i\pi\alpha_1^*(p)\right)\sin(\pi\alpha_0)\sin(\pi\alpha_1)}{\pi^2}\tilde{q}(p) \cdot \zeta(p) = \Big(q \circ \tau_1(p) \cdot q \circ \tau_0(p) \\
&- q(p) \cdot q \circ \tau_0 \circ \tau_1(p)\exp(2\pi i\alpha_0) - \tilde{q}(p) \cdot \tilde{q} \circ \tau_\infty(p) - \exp\left(2\pi i\alpha_0^*(p)\right)\Big)\zeta \circ \tau_\infty^{-1}(p) \\
&+ \exp(2\pi i\alpha_1)\left(\exp(2\pi i\alpha_0) - 1\right) q(p) \cdot q \circ \tau_0(p) \cdot \zeta \circ \tau_\infty^{-1} \circ \tau_1(p)
\end{aligned} \tag{6.19}$$

v) *Es gilt*

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{Q}_{1\infty}(p) &= \zeta(p)(\zeta \circ \tau_\infty^{-1} \circ \tau_1)(p) - (\zeta \circ \tau_\infty^{-1})(p)(\zeta \circ \tau_1)(p) \\
&= \gamma \exp\left(i\pi\left(\frac{\beta_0 + \beta_1}{\gamma}\right)\right)\frac{\sin(\pi\alpha_1)}{\pi}
\end{aligned} \tag{6.20}$$

und damit für $\alpha_1 \notin \mathbb{Z}$:

$$\mathbf{Q}_{1\infty}^{-1}(p) = \frac{\pi}{\gamma\sin(\pi\alpha_1)}\exp\left(-i\pi\frac{\beta_0+\beta_1}{\gamma}\right)\begin{pmatrix} \zeta \circ \tau_1 & \zeta \circ \tau_\infty^{-1} \circ \tau_1 \\ -\zeta & -\zeta \circ \tau_\infty^{-1} \end{pmatrix}(p).$$

Beweis :
Zu i): Aufgrund von (6.15) und $\zeta_1 = -\zeta \circ \tau_\infty^{-1}$ gilt

$$\zeta \circ \tau_\infty^{-1} = \exp\left(-i\pi\alpha_1^*\right) \tilde{q}\zeta + \exp\left(i\pi(\alpha_0^* - \alpha_1^*)\right) (\zeta \circ \tau_\infty).$$

Damit folgt wegen $\alpha_j^* \circ \tau_\infty = \alpha_{1-j}^*$, $(j = 0, 1)$:

$$\zeta = \exp\left(-i\pi\alpha_0^*\right) (\tilde{q} \circ \tau_\infty)(\zeta \circ \tau_\infty) + \exp\left(i\pi(\alpha_1^* - \alpha_0^*)\right) (\zeta \circ \tau_\infty^2) \tag{6.21}$$

und damit

$$\zeta \circ \tau_\infty^2 = \exp\left(i\pi(\alpha_0^* - \alpha_1^*)\right) \zeta - \exp\left(-i\pi\alpha_1^*\right) (\tilde{q} \circ \tau_\infty)(\zeta \circ \tau_\infty).$$

Geht man analog zum Beweis von (6.6)ii) vor, so folgt die partielle Holomorphie von ζ.
Zu ii): Wir wenden die Transformation t_0 auf die Gleichung $c\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_\infty \circ \mathbf{Q}_{1\infty}$ an und erhalten aufgrund von (5.19) und (5.33):

$$(c \circ \tau_0)(p)\mathcal{F}_1(p, \cdot) = \hat{\gamma}^{-\alpha_0}\mathcal{F}_\infty(p, \cdot) \circ \left(\mathbf{Q}_{1\infty} \circ \tau_0\right)(p).$$

Es gilt $c \circ \tau_0(p) = \hat{\gamma}^{-\alpha_0}c(p)$. Somit folgt $\mathbf{Q}_{1\infty} = \mathbf{Q}_{1\infty} \circ \tau_0$, also $\zeta = \zeta \circ \tau_0$.
Zu v): Mit (6.9) folgt $c \cdot \begin{pmatrix} t_{01}\Phi & t_1 t_{01}\Phi \\ (t_{01}\Phi)' & (t_1 t_{01}\Phi)' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi & \tilde{\Psi} \\ \Psi' & \tilde{\Psi}' \end{pmatrix} \circ \mathbf{Q}_{1\infty}$ und somit

$$c^2\omega\left(t_{01}\Phi, t_1 t_{01}\Phi\right) = \omega\left(\Psi, \tilde{\Psi}\right) \det \mathbf{Q}_{1\infty},$$

wobei ω die in (4.17) definierte Wronskideterminante ist. Hieraus folgt $c^2[t_{01}\Phi, t_1 t_{01}\Phi] = [\Psi, \tilde{\Psi}] \det \mathbf{Q}_{1\infty}$ und mit (5.7) und (5.30) dann:

$$\begin{aligned} &\left(\exp\left(i\pi\left(\alpha_1 + \frac{\beta_0 + \beta_1}{\gamma}\right) + \gamma\right) \hat{\gamma}^{\alpha_0+\alpha_1}\right) \left(-\exp\left(-\gamma\right) \frac{\sin(\pi\alpha_1)}{\pi}\right) \\ &\qquad = -\exp\left(i\pi\alpha_1\right) \hat{\gamma}^{\alpha_0+\alpha_1-1} \det \mathbf{Q}_{1\infty}(p). \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.
Zu iii): Im Fall $\alpha_0^*(p), \alpha_1^*(p) \notin \mathbb{Z}$ existieren $a, b, x, y \in \mathbb{C}$ mit:

$$\tilde{\Psi}(\tau_*(p), \cdot) = \mathcal{F}_0(\tau_*(p), \cdot) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \left(\phi_0\tilde{\Psi}\right)(\tau_*(p), \cdot) = \mathcal{F}_1(\tau_*(p), \cdot) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Damit folgt wegen (5.37):

$$\begin{aligned} 2\pi i\hat{\gamma}^{\alpha_0+\alpha_1-1}(t_0\Phi)(p, \cdot) =& a \exp\left(i\pi(2\alpha_0 - \alpha_1^*(p))\right) \left(\mathcal{L}_0\Phi\right)(p, \cdot) \\ &+ x \exp\left(i\pi(\alpha_1^*(p) - 2\alpha_1)\right) \left(\mathcal{L}_1 t_{01}\Phi\right)(p, \cdot), \end{aligned}$$

und daher existiert wegen (5.22) und (5.29) ein $k \in \mathbb{C}$ mit

$$\begin{aligned} 2\pi i c(p)(t_0\Phi)(p, \cdot) =& c(p) \exp\left(i\pi(2\alpha_0 - \alpha_1^*(p))\right) \hat{\gamma}^{1-\alpha_0-\alpha_1} a \cdot \\ & 2i \sin\left(\pi\alpha_0^*(p)\right) \exp(-2\pi i\alpha_0^*(p))\Psi(p, \cdot) + k\tilde{\Psi}(p, \cdot). \end{aligned}$$

Andererseits gilt wegen (6.16)

$$2\pi i c(p)(t_0\Phi)(p,\cdot) = -2\pi i \exp(\gamma)\exp(i\pi\alpha_0)\,\zeta\circ\tau_{01}^{-1}\circ\tau_\infty^{-1}\circ\tau_0(p)\Psi(p,\cdot) \\ + 2\pi i\exp(i\pi\alpha_0)\,\zeta\circ\tau_{01}^{-1}\circ\tau_0(p)\tilde{\Psi}(p,\cdot)$$

und somit folgt unter Berücksichtigung von $\alpha_0+\alpha_1=\alpha_0^*(p)+\alpha_1^*(p)$:

$$\begin{aligned} &\zeta\circ\tau_{01}^{-1}\circ\tau_\infty^{-1}\circ\tau_0(p) \\ &\quad= -\exp(-\gamma)\exp(-i\pi(\alpha_0^*(p)+\alpha_1))\,c(p)\frac{\sin(\pi\alpha_0^*(p))}{\pi}\hat{\gamma}^{1-\alpha_0-\alpha_1}a. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Aufgrund von (6.16) gilt

$$\mathcal{F}_\infty(\tau_*(p),\cdot) = c(\tau_*(p))\,\mathcal{F}_0(\tau_*(p),\cdot)\circ\mathbf{Q}_{0\infty}^{-1}(\tau_*(p)) = c(\tau_*(p))\,\mathcal{F}_0(\tau_*(p),\cdot) \\ \circ\begin{pmatrix}\exp(i\pi\alpha_0^*(p)) & 0\\ 0 & \exp(-i\pi\alpha_0^*(p))\end{pmatrix}\circ\left(\mathbf{Q}_{1\infty}^{-1}\circ\tau_{01}^{-1}\circ\tau_*\right)(p)\circ\begin{pmatrix}\exp(-\gamma) & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

und somit wegen (6.17)iv) und $\tau_{01}^{-1}\circ\tau_*(p)=(\alpha_1^*(p),-\beta_1^*(p),\alpha_0^*(p),-\beta_0^*(p),\delta_\pi(\hat{\gamma}))$:

$$\begin{aligned} a &= \exp\left(i\frac{\pi}{2}\left(\alpha_1^*(p)+\frac{\beta_0^*(p)+\beta_1^*(p)}{\gamma}\right)+\frac{\gamma}{2}\right)\hat{\gamma}^{\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}}\exp(i\pi\alpha_0^*(p)) \\ &\cdot\frac{\pi}{-\gamma\sin(\pi\alpha_0^*(p))}\exp\left(-i\pi\frac{\beta_0^*(p)+\beta_1^*(p)}{\gamma}\right)\zeta\circ\tau_{01}^{-1}\circ\tau_\infty^{-1}\circ\tau_0\circ\tau_*(p) \\ &= -\exp\left(i\frac{\pi}{2}\left(\alpha_1^*(p)-\frac{\beta_0^*(p)+\beta_1^*(p)}{\gamma}\right)+\frac{\gamma}{2}\right)\hat{\gamma}^{\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}-1}\exp(i\pi\alpha_0^*(p)) \\ &\cdot\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha_0^*(p))}\zeta\circ\tau_{01}^{-1}\circ\tau_\infty^{-1}\circ\tau_0\circ\tau_*(p). \end{aligned} \tag{6.23}$$

Aufgrund von (4.7) folgt

$$\alpha_1^*(p)-\frac{\beta_0^*(p)+\beta_1^*(p)}{\gamma} = \frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}-\frac{\beta_0+\beta_1}{\gamma}-\frac{1}{2}(\alpha_0-\alpha_1) = \alpha_1-\frac{\beta_0+\beta_1}{\gamma}$$

und mit $c(p)=\exp\left(i\frac{\pi}{2}\left(\alpha_1+\frac{\beta_0+\beta_1}{\gamma}\right)\right)\exp\left(\frac{\gamma}{2}\right)\hat{\gamma}^{\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}}$, (6.22) und (6.23) daher:

$$\zeta\circ\tau_{01}^{-1}\circ\tau_\infty^{-1}\circ\tau_0(p) = \zeta\circ\tau_{01}^{-1}\circ\tau_\infty^{-1}\circ\tau_0\circ\tau_*(p). \tag{6.24}$$

Ersetzt man p durch $\tau_0\circ\tau_\infty\circ\tau_{01}\circ\tau_1(p)=\tau_\infty\circ\tau_{01}(p)$ in (6.24) und wegen

$$\tau_{01}^{-1}\circ\tau_\infty^{-1}\circ\tau_0\circ\tau_*\circ\tau_\infty\circ\tau_{01} = \tau_{01}^{-1}\circ\tau_\infty^{-1}\circ\tau_0\circ\tau_{01}^{-1}\circ\tau_\infty^{-1}\circ\tau_* = \tau_{01}^{-2}\circ\tau_\infty^{-2}\circ\tau_1\circ\tau_* = \tau_1\circ\tau_*$$

(siehe (4.5) und (4.8)) folgt die Behauptung für den Fall $\alpha_0^*(p),\alpha_1^*(p)\notin\mathbb{Z}$. Mit dem Identitätssatz folgt dann die volle Behauptung iii).

Zu iv): Im Fall $\alpha_0,\alpha_1\notin\mathbb{Z}$ ist $M_0(p)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \exp(2\pi i\alpha_0)\end{pmatrix}$ die Monodromiematrix

von $\mathcal{F}_0$ bei 1 bzw. $M_1(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp(2\pi i \alpha_1) \end{pmatrix}$ die Monodromiematrix von $\mathcal{F}_1$ bei 1.
Aus (6.9) folgt

$$c(\phi_\infty \mathcal{F}_1) = (\phi_\infty \mathcal{F}_\infty) \circ \mathbf{Q}_{1\infty}.$$

Mit $\mathbf{Q}_{01}$ aus (6.1) und $x(p) := \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\right) \dfrac{\sin(\pi\alpha_1)}{\pi}$, $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ folgt:

$$\begin{aligned} \phi_\infty \mathcal{F}_1 &= (\phi_1 \phi_0 \mathcal{F}_1) = \phi_1 \circ \phi_0 \left(x\mathcal{F}_0 \circ \mathbf{Q}_{01}^{-1}\right) = \phi_1 \left(x\mathcal{F}_0 \circ M_0 \circ \mathbf{Q}_{01}^{-1}\right) \\ &= \phi_1 \left(\mathcal{F}_1 \circ \mathbf{Q}_{01} \circ M_0 \circ \mathbf{Q}_{01}^{-1}\right) = \mathcal{F}_1 \circ M_1 \circ \mathbf{Q}_{01} \circ M_0 \circ \mathbf{Q}_{01}^{-1}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit $\mathbf{M}_\infty$ aus (5.36) und $\mathbf{S} := M_1 \circ \mathbf{Q}_{01} \circ M_0 \circ \mathbf{Q}_{01}^{-1}$:

$$\mathcal{F}_\infty \circ \mathbf{Q}_{1\infty} \circ \mathbf{S} \overset{(6.9)}{=} c\mathcal{F}_1 \circ \mathbf{S} = \mathcal{F}_\infty \circ \mathbf{M}_\infty \circ \mathbf{Q}_{1\infty}$$

und damit $\mathbf{Q}_{1\infty} \circ \mathbf{S} = \mathbf{M}_\infty \circ \mathbf{Q}_{1\infty}$.
Wir definieren nun $\mathbf{M}_\infty =: \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{S} =: \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix}$. Aus der bisherigen Theorie geht hervor, dass die m_i, s_i $i \in \{1...4\}$ bekannt sind, oder mit angegebenen Limesformeln berechnet werden können. Zudem gilt

$$\begin{aligned} &\mathbf{Q}_{1\infty} \circ \mathbf{S} = \mathbf{M}_\infty \circ \mathbf{Q}_{1\infty} \Rightarrow \mathbf{S}^t \circ \mathbf{Q}_{1\infty}^t = \mathbf{Q}_{1\infty}^t \mathbf{M}_\infty^t \\ &\Rightarrow \mathbf{S}^t \circ \begin{pmatrix} -\zeta \circ \tau_\infty^{-1} & \zeta \\ -\zeta \circ \tau_\infty^{-1} \circ \tau_1 & \zeta \circ \tau_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\zeta \circ \tau_\infty^{-1} & \zeta \\ -\zeta \circ \tau_\infty^{-1} \circ \tau_1 & \zeta \circ \tau_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} m_1 & m_3 \\ m_2 & m_4 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.25}$$

und damit

$$\left(\mathbf{S}^t - m_1\right) \begin{pmatrix} -\zeta \circ \tau_\infty^{-1} \\ -\zeta \circ \tau_\infty^{-1} \circ \tau_1 \end{pmatrix} = m_2 \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta \circ \tau_1 \end{pmatrix}, \tag{6.26}$$

$$\left(\mathbf{S}^t - m_4\right) \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta \circ \tau_1 \end{pmatrix} = m_3 \begin{pmatrix} -\zeta \circ \tau_\infty^{-1} \\ -\zeta \circ \tau_\infty^{-1} \circ \tau_1 \end{pmatrix}. \tag{6.27}$$

Aus der ersten Zeile von (6.27) erhält man (6.18) und aus der ersten Zeile von (6.26) erhält man (6.19) für den Fall $\alpha_0, \alpha_1 \notin \mathbb{Z}$. Aufgrund der Stetigkeit der in (6.18) und (6.19) auftretenden Funktionen folgt dann die Behauptung. □

(6.28) Bemerkung (Zusammenhang von ζ mit q und $\tilde{q}$):
Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$.
Im Fall $\zeta(p) \neq 0$ lässt sich $\tilde{q}(p)$ aus (5.34) mit Hilfe von ζ wie folgt darstellen:

$$\tilde{q}(p) = \frac{\exp\left(i\pi\alpha_1^*(p)\right)(\zeta \circ \tau_\infty^{-1})(p) - \exp\left(i\pi\alpha_0^*(p)\right)\left(\zeta \circ \tau_\infty\right)(p)}{\zeta(p)}.$$

Im Fall $\zeta \circ \tau_* \circ \tau_0(p) \neq 0$ lässt sich $q(p)$ aus (6.1) mit Hilfe von ζ wie folgt darstellen:

$$2\pi i \exp\left(\frac{\gamma}{2}\right) q(p) = \frac{\left(\zeta \circ \tau_\infty^{-1} \circ \tau_* \circ \tau_0\right)(p) - \exp\left(-\pi i(\alpha_0 + \alpha_1)\right)\left(\zeta \circ \tau_\infty \circ \tau_* \circ \tau_0\right)(p)}{\zeta \circ \tau_* \circ \tau_0(p)}.$$

Beweis:
Die erste Behauptung folgt direkt aus (6.21). Die zweite Behauptung erhält man hieraus mit Hilfe von (6.7). □

Nun wollen wir eine Limesformel für ζ angeben. Hierfür wenden wir Korollar (3.3) aus [16] auf unseren Fall an.
Der Autor dort geht auch auf den Spezialfall der verallgemeinerten Heunschen Differentialgleichung ein, welche im Gegensatz zur hier behandelten konfluenten Heunschen Differentialgleichung noch eine einfache Singularität mehr hat. Es stellt sich aber heraus, dass es ratsamer ist, die konfluente Heunsche Differentialgleichung selbst in den allgemeinen Fall einzuordnen, anstatt sie als Spezialfall der verallgemeinerten Heunschen Differentialgleichung zu sehen.
In [16] wird eine lineare Differentialgleichung in $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$, in folgender Form betrachtet:

$$y'(t) = \left(\frac{1}{t}A_0 + \frac{1}{(t-1)^2}B + \frac{1}{t-1}A_1 + G(t)\right) y(t), \tag{6.29}$$

wobei A_0, A_1 und B komplexe $n \times n$-Matrizen sind und G eine in $t \in K_r(0)$ ($r \in]1, \infty[$) holomorphe Funktion ist. Außerdem soll B n verschiedene Eigenwerte besitzen, also o.B.d.A.:

$$B = \operatorname{diag}(\lambda_1, .., \lambda_n), \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ für } i \neq j. \tag{6.30}$$

Diese Differentialgleichung (6.29) hat in 0 eine einfache Singularität und in 1 eine irreguläre Singularität vom Rang 1. Um nun Korollar (3.3) aus [16] für unsere Zwecke anwenden zu können, transformieren wir die Differentialgleichung (1.5) für $\mu \in \mathbb{C}$ mittels

$$\eta(z) = z^\mu v(t), \quad z = \frac{1}{1-t}. \tag{6.31}$$

Hierbei transformieren sich die Singularitäten von (1.5) wie folgt:

$$1 \to 0,\ \infty \to 1,\ 0 \to \infty. \tag{6.32}$$

Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
\eta'(z) =& \mu(1-t)^{-\mu+1}v(t) + (1-t)^{-\mu+2}v'(t) = (1-t)^{-\mu+1}\left(\mu v + (1-t)v'\right),\\
\eta''(z) =& (\mu^2 - \mu)(1-t)^{-\mu+2}v(t) + 2(\mu-1)(1-t)^{-\mu+3}v'(t) + (1-t)^{-\mu+4}v''(t).
\end{aligned}$$

Sei nun $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$.

Mit (6.31) ist die *CHE* (1.5) äquivalent zu

$$\begin{aligned}
&v'' + 2(\mu-1)(1-t)^{-1}v' + (\mu^2-\mu)(1-t)^{-2}v \\
&\quad + \left[(1-\alpha_0)(1-t) + \frac{(1-\alpha_1)(1-t)}{t} - \gamma\right] \cdot \left(\mu(1-t)^{-3}v + (1-t)^{-2}v'\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\frac{(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)(1-t)^2}{t} + \left(\beta_0 - \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_0)\right)(1-t)\right. \\
&\qquad \left. + \frac{\left(\beta_1 - \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_1)\right)(1-t)}{t}\right)(1-t)^{-4}v = 0,
\end{aligned}$$

und somit äquivalent zu

$$v'' + \tilde{a}(t)v' + \tilde{b}(t)v = 0, \tag{6.33}$$

wobei $\tilde{a}(t)$ und $\tilde{b}(t)$ wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(t) :=& \left[\frac{2\mu-\alpha_0-1}{(1-t)} + \frac{1-\alpha_1}{(1-t)t} - \frac{\gamma}{(1-t)^2}\right] = \left[\frac{1-\alpha_1}{t} + \frac{2\mu-\alpha_0-\alpha_1}{1-t} - \frac{\gamma}{(1-t)^2}\right] \\
\tilde{b}(t) :=& \left[\frac{\mu^2-\mu\alpha_0}{(1-t)^2} + \frac{(1-\alpha_1)\mu + \frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)}{t(1-t)^2} + \frac{\beta_0 - \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_0) - \gamma\mu}{(1-t)^3} + \right. \\
& \left. \frac{\beta_1 - \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_1)}{t(1-t)^3}\right].
\end{aligned}$$

(6.33) transformieren wir wie üblich mittels

$$u(t) := \begin{pmatrix} v(t) \\ (t-1)v'(t) \end{pmatrix}$$

in ein Differentialgleichungssystem der Form $u'(t) = \tilde{A}(t)u(t)$ mit :

$$\tilde{A}(t) := \frac{1}{(t-1)}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\tilde{b}(t)(t-1)^2 & 1-\tilde{a}(t)(t-1) \end{pmatrix}.$$

Über

$$\begin{aligned}
-\tilde{b}(t)(t-1) =& \left[\frac{\mu(\alpha_0+\alpha_1) - \mu - \mu^2 - \frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1) - \left(\beta_1 - \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_1)\right)}{(t-1)}\right. \\
& + \frac{\left(\beta_0 + \beta_1 - \frac{1}{2}\gamma(2-\alpha_0-\alpha_1) - \gamma\mu\right)}{(t-1)^2} \\
& \left. + \frac{(1-\alpha_1)\mu + \frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1) + \left(\beta_1 - \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_1)\right)}{t}\right], \\
\frac{1}{(t-1)} - \tilde{a}(t) =& \left[-\frac{(1-\alpha_1)}{t} + \frac{2\mu-\alpha_0-\alpha_1+1}{(t-1)} + \frac{\gamma}{(t-1)^2}\right].
\end{aligned}$$

folgt

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}(t) = & \frac{1}{t}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (1-\alpha_1)\left(\mu + \frac{1}{2}(1-\alpha_0-\gamma)\right) + \beta_1 & \alpha_1 - 1 \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{t-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu(\alpha_0+\alpha_1-1) - \mu^2 - \beta_1 + (\gamma - 1 + \alpha_0)\frac{1}{2}(1-\alpha_1) & 2\mu - \alpha_0 - \alpha_1 + 1 \end{pmatrix} \\
& + \frac{1}{(t-1)^2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta_0 + \beta_1 - \frac{1}{2}\gamma(2-\alpha_0-\alpha_1) - \gamma\mu & \gamma \end{pmatrix} \\
=: & \frac{1}{t}A_0 + \frac{1}{t-1}A_1 + \frac{1}{(t-1)^2}B, \quad A_0, A_1, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}.
\end{aligned}
$$

Damit (6.30) erfüllt ist, wählen wir μ so, dass B eine Diagonalmatrix ist. Dies ist genau dann der Fall wenn

$$
\mu = \frac{\beta_0 + \beta_1}{\gamma} - \frac{1}{2}(2 - \alpha_0 - \alpha_1) = \alpha_0^*(p) - 1 \tag{6.34}
$$

gilt.
Die in $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$ holomorphe Lösung $\tilde{\Phi}\left(\tau_{01}(p), T(\cdot)\right)$ von (1.5) wird mit (6.31) in eine in 0 holomorphe Lösung v_0 von (6.33) transformiert.
Daher hat v_0 für $|t| < 1$ eine Potentreihendarstellung der Form:

$$
v_0(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{\Gamma(k+1-\alpha_1)} t^k, \ |t| < 1, \tag{6.35}
$$

mit $c_0 = \Gamma(1-\alpha_1)v_0(0) = 1$.
Nun wollen wir die Rekursionsformel für die Koeffizienten der Reihe herleiten. Hierzu stellen wir (6.33) mit Hilfe des Operators $D = t\frac{d}{dt}$ dar.
Für $t \in \Omega$ gilt

$$
\begin{aligned}
& t(t-1)^3\tilde{a}(t) = (1-\alpha_1)(t-1)^3 - (2\mu - \alpha_0 - \alpha_1)t(t-1)^2 - \gamma t(t-1) \\
= & (t^3 - 3t^2 + 3t - 1)(1-\alpha_1) - (2\mu - \alpha_0 - \alpha_1)(t^3 - 2t^2 + t) - \gamma(t^2 - t) \\
= & t^3(1 - 2\mu + \alpha_0) + t^2\left(4\mu - 2\alpha_0 + \alpha_1 - 3 - \gamma\right) \\
& \qquad + t\left(3 - 2\alpha_1 - 2\mu + \alpha_0 + \gamma\right) - (1-\alpha_1)
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
& \tilde{b}(t)t(t-1)^3 = (\mu^2 - \mu\alpha_0)(t^2 - t) + \left((1-\alpha_1)\mu + \frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\right)(t-1) \\
& - \left(\beta_0 - \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_0) - \gamma\mu\right)t - \left(\beta_1 - \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_1)\right) \\
= & (\mu^2 - \mu\alpha_0)t^2 + \left(\frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1+\gamma) - \mu^2 + \mu(1+\alpha_0+\gamma-\alpha_1) - \beta_0\right)t \\
& - \left(\beta_1 - \frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_1)\right) - \left(\mu(1-\alpha_1) + \frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\right)
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
& t\Big(t(t-1)^3v''(t)+t(t-1)^3\tilde{a}(t)v'(t)+\tilde{b}(t)t(t-1)^3v(t)\Big)\\
=& t^3\Big[t^2v''(t)+tv'(t)(1-2\mu+\alpha_0)+(\mu^2-\mu\alpha_0)v(t)\Big]\\
&+t^2\Big[-3t^2v''(t)+tv'(t)(4\mu-2\alpha_0+\alpha_1-3-\gamma)\\
&+\Big(\frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1+\gamma)-\mu^2+\mu(1+\alpha_0+\gamma-\alpha_1)-\beta_0\Big)v(t)\Big]\\
&+t\Big[3t^2v''(t)+tv'(t)(3-2\alpha_1-2\mu+\alpha_0+\gamma)\\
&+\Big(-\Big(\beta_1-\frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_1)\Big)-\Big(\mu(1-\alpha_1)+\frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\Big)\Big)v(t)\Big]\\
&+\Big[-t^2v''(t)-t(1-\alpha_1)v'(t)\Big].
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt

$$
\begin{aligned}
& t\Big(t(t-1)^3v''(t)+t(t-1)^3\tilde{a}(t)v'(t)+\tilde{b}(t)t(t-1)^3v(t)\Big)\\
=& t^3\Big[D^2+(\alpha_0-2\mu)D+(\mu^2-\mu\alpha_0)\Big]v(t)+t^2\Big[-3D^2+(4\mu-2\alpha_0+\alpha_1-\gamma)D\\
&+\Big(\frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1+\gamma)-\mu^2+\mu(1+\alpha_0+\gamma-\alpha_1)-\beta_0\Big)\Big]v(t)\\
&+t\Big[3D^2+(-2(\alpha_1+\mu)+\alpha_0+\gamma)D-\Big(\beta_1-\frac{1}{2}\gamma(1-\alpha_1)\Big)\\
&-\Big(\mu(1-\alpha_1)+\frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1)\Big)\Big]v(t)+\Big[(\alpha_1-D)D\Big]v(t)=0.
\end{aligned}
$$

Damit erfüllen die c_k folgende Vierterm-Rekursion:

$$
\begin{aligned}
&-(k+1)(k+1-\alpha_1)\frac{c_{k+1}}{\Gamma(k+2-\alpha_1)}+\tilde{\phi}_1(k,\mu)\frac{c_k}{\Gamma(k+1-\alpha_1)}+\tilde{\phi}_2(k,\mu)\frac{c_{k-1}}{\Gamma(k-\alpha_1)}\\
&+\tilde{\phi}_3(k,\mu)\frac{c_{k-2}}{\Gamma(k-1-\alpha_1)}=0\ (k\in\mathbb{N}),\ c_{-1}:=c_{-2}:=0
\end{aligned}
\tag{6.36}
$$

mit

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_1(k,\mu) &:= \left(3k^2 + k\left(-2(\alpha_1+\mu)+\alpha_0+\gamma\right) - \beta_1 - (1-\alpha_1)\left(\mu + \frac{1}{2}(1-\alpha_0) - \frac{1}{2}\gamma\right)\right) \\
\tilde{\phi}_2(k,\mu) &:= \Big(- 3(k-1)^2 + (k-1)\left(4\mu - 2\alpha_0 + \alpha_1 - \gamma\right) + \frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1+\gamma) - \mu^2 \\
&\quad +\mu(1+\alpha_0+\gamma-\alpha_1) - \beta_0\Big) \\
\tilde{\phi}_3(k,\mu) &:= \Big((k-2)^2 + (k-2)(\alpha_0 - 2\mu) + (\mu^2 - \mu\alpha_0)\Big).
\end{aligned}$$

Setzen wir nun $\mu = \alpha_0^*(p) - 1$ und multiplizieren (6.36) mit $\Gamma(k+1-\alpha_1)$, so erhalten wir:

$$-(k+1)c_{k+1} + \phi_1(p,k)c_k + \phi_2(p,k)c_{k-1} + \phi_3(p,k)c_{k-2} = 0$$

mit $c_0(p) = 1$ und $c_{-1}(p) = c_{-2}(p) = 0$ und

$$\begin{aligned}
\phi_1(p,k) :=& 3k^2 + k\left(-2(\alpha_1 + \alpha_0^*(p) - 1) + \alpha_0 + \gamma\right) \\
&\quad - \beta_1 - (1-\alpha_1)\left(\alpha_0^*(p) - 1 + \frac{1}{2}(1-\alpha_0) - \frac{1}{2}\gamma\right) \\
\phi_2(p,k) :=& \Big(- 3(k-1)^2 + (k-1)\left(4(\alpha_0^*(p)-1) - 2\alpha_0 + \alpha_1 - \gamma\right) \\
&\quad + \frac{1}{2}(1-\alpha_0)(1-\alpha_1+\gamma) - (\alpha_0^*(p)-1)^2 \\
&\quad + (\alpha_0^*(p)-1)(1+\alpha_0+\gamma-\alpha_1) - \beta_0\Big)(k-\alpha_1) \\
\phi_3(p,k) :=& \Big((k-2)^2 + (k-2)(-2(\alpha_0^*(p)-1)+\alpha_0) + (\alpha_0^*(p)-1)^2 \\
&\quad - (\alpha_0^*(p)-1)\alpha_0\Big)(k-\alpha_1)(k-1-\alpha_1).
\end{aligned} \tag{6.37}$$

In dem Sektor

$$S_{\arg(\hat{\gamma})} := \left\{ \hat{z} \in \widehat{\Omega}_\infty^+ \,\middle|\, -\frac{\pi}{2} - \arg(\hat{\gamma}) < \arg_0(\hat{z}) < \frac{3\pi}{2} - \arg(\hat{\gamma}) \right\}$$

haben $\Psi(p,\cdot)$ und $\tilde{\Psi}(p,\cdot)$ jeweils das in (5.22) und (5.29) beschriebene asymptotische Verhalten.
Mit (6.31) und (6.34) transformieren wir

$$\Psi(p,\cdot) \circ \left(P|_{S_{\arg(\hat{\gamma})}}\right)^{-1},\ \tilde{\Psi}(p,\cdot) \circ \left(P|_{S_{\arg(\hat{\gamma})}}\right)^{-1},\ (t_{01}\Phi)(p,\cdot) \circ \left(P|_{S_{\arg(\hat{\gamma})}}\right)^{-1}$$

zu Lösungen v_1^+, v_2^+, v_0 der Differentialgleichung (6.33), wobei hier v_0 eine analytische Fortsetzung der Funktion aus (6.35) bezeichnet.

v_1^+ und v_2^+ erfüllen dann

$$v_1^+(t) \sim \hat{\gamma}^{\alpha_0^*(p)-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \left(\tau_1 \circ \tau_\infty \circ \tau_*(p)\right) \hat{\gamma}^{-n} (1-t)^n \quad (t \to 1),$$
$$v_2^+(t) \sim \exp\left(\frac{\gamma}{1-t}\right) \hat{\gamma}^{\alpha_1^*(p)-1} (1-t)^{\alpha_0^*(p)-\alpha_1^*(p)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\tau_1 \circ \tau_\infty \circ \tau_*(p)\right) \hat{\gamma}^{-n} (1-t)^n$$
$$(t \to 1) \tag{6.38}$$

und aufgrund von (6.9) gilt:

$$c(p) v_0 = -\zeta \circ \tau_\infty^{-1}(p) v_1^+ + \zeta(p) v_2^+ \tag{6.39}$$

mit $c(p)$ aus (6.9).
Wir geben nun eine Limesformel sowie eine Vorgehensweise an, mit der sich alle Einträge der Matrix $\mathbf{Q}_{1\infty}$ im Fall $\alpha_1 \notin \mathbb{Z}$, $\gamma \notin \mathbb{R}^*$ berechnen lassen. (Bei der Limesformel wird jedoch noch $\alpha_1 \in -\mathbb{N}$ zulassen.)
Für den Fall $\gamma \in \mathbb{R}^*$ verweisen wir auf Satz (3.2) und Korollar (3.3) aus [16].

Mit Korollar (3.3) aus [16] erhalten wir:

(6.40) Satz:
Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ *und* $c_k \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ *wie folgt definiert:*

$$(k+1) c_{k+1} = c_k \phi_1(p,k) + c_{k-1} \phi_2(p,k) + c_{k-2} \phi_3(p,k), \tag{6.41}$$

wobei $c_0 = 1, c_{-1} = c_{-2} = 0$ *gilt und* $\phi_j(p,k)$ $(j = 1,2,3)$ *aus (6.37) ist.*
Dann gilt im Fall $\arg(\hat{\gamma}) \in]0, \pi[$ *und* $\alpha_1 \notin \mathbb{N}^*$*:*

$$\zeta(p) = 2\sqrt{\pi} \exp\left(i \frac{\pi}{2} \left(\alpha_1 + \frac{\beta_0 + \beta_1}{\gamma}\right)\right) \hat{\gamma}^{\frac{3}{4}} \lim_{k \to \infty} \exp\left(-2 \hat{\gamma}^{\frac{1}{2}} \sqrt{k}\right) k^{\frac{\beta_0+\beta_1}{\gamma} + \frac{3}{4}} \frac{c_k}{\Gamma(k+1-\alpha_1)}. \tag{6.42}$$

Beweis:
Der Sektor H^+ aus [16], Kapitel 1 ist aufgrund von $\arg(\hat{\gamma}) \in]0, \pi[$ eine Teilmenge des gemeinsamen Definitionsbereichs von v_1^+, v_2^+. Diese erfüllen dort (6.38). Damit sind v_1^+, v_2^+ die in [16], Kapitel 1 festgelegten Lösungen. Da $\arg(\hat{\gamma}) \in]0, \pi[$ vorausgesetzt wurde, lässt sich v_0 auf $\mathbb{C} \backslash [1, \infty[$ holomorph fortsetzen, und es gilt $\gamma \notin]-\infty, 0]$.
Die Potenzreihe von v_0 um 0 ist von der Form (6.35) und die c_k erfüllen die Rekursion (6.41).
Um nun Korollar(3.3) aus [16] anwenden zu können, multiplizieren wir (6.39) mit $\Gamma(1-\alpha_1)$ und erhalten:

$$\Gamma(1-\alpha_1) c(p) v_0(t) = -\Gamma(1-\alpha_1) \zeta \circ \tau_\infty^{-1}(p) v_1^+(t) + \Gamma(1-\alpha_1) \zeta(p) v_2^+(t). \tag{6.43}$$

Nun wenden wir Korollar (3.3) aus [16] an. Mit $c(p)$ aus (6.9) folgt:

$$\begin{aligned}\Gamma(1-\alpha_1)\frac{\hat{\gamma}^{\alpha_1^*(p)-1}}{c(p)}\zeta(p) =& 2\sqrt{\pi}\Gamma(1-\alpha_1)\exp\left(\frac{-\gamma}{2}\right)\hat{\gamma}^{\frac{\alpha_1^*(p)-\alpha_0^*(p)}{2}-\frac{1}{4}} \\ & \cdot\lim_{k\to\infty}\exp\left(-2\hat{\gamma}^{\frac{1}{2}}\sqrt{k}\right)k^{\frac{\alpha_0^*(p)-\alpha_1^*(p)}{2}+\frac{3}{4}}\frac{c_k}{\Gamma(k+1-\alpha_1)}.\end{aligned} \tag{6.44}$$

Unter Berücksichtigung von $\alpha_0^*(p)+\alpha_1^*(p)=\alpha_0+\alpha_1$ und $\alpha_0^*(p)-\alpha_1^*(p)=\frac{\beta_0+\beta_1}{\gamma}$ erhalten wir dann:

$$\begin{aligned}\zeta(p) &= 2\sqrt{\pi}\exp\left(i\frac{\pi}{2}\left(\alpha_1+\frac{\beta_0+\beta_1}{\gamma}\right)+\frac{\gamma}{2}\right)\hat{\gamma}^{\frac{\alpha_0+\alpha_1}{2}}\hat{\gamma}^{1-\alpha_1^*(p)}\exp\left(\frac{-\gamma}{2}\right)\hat{\gamma}^{\frac{\alpha_1^*(p)-\alpha_0^*(p)}{2}-\frac{1}{4}} \\ &\quad\cdot\lim_{k\to\infty}\exp\left(-2\hat{\gamma}^{\frac{1}{2}}\sqrt{k}\right)k^{\frac{\alpha_0^*(p)-\alpha_1^*(p)}{2}+\frac{3}{4}}\frac{c_k}{\Gamma(k+1-\alpha_1)} \\ &= 2\sqrt{\pi}\exp\left(i\frac{\pi}{2}\left(\alpha_1+\frac{\beta_0+\beta_1}{\gamma}\right)\right)\hat{\gamma}^{\frac{3}{4}}\lim_{k\to\infty}\exp\left(-2\hat{\gamma}^{\frac{1}{2}}\sqrt{k}\right)k^{\frac{\beta_0+\beta_1}{\gamma}+\frac{3}{4}}\frac{c_k}{\Gamma(k+1-\alpha_1)}.\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

Im Fall $\arg(\hat{\gamma})\in]0,\pi[$ lassen sich mit Satz (6.40) die Einträge der unteren Zeile der Matrix $\mathbf{Q}_{1\infty}(p)$ bestimmen. Für den Fall $\arg(\hat{\gamma})\in]\pi,2\pi[$ lassen sich über (6.40) die Einträge der oberen Zeile der Matrix $\mathbf{Q}_{1\infty}(p)$ bestimmen.
Hiermit und mit Hilfe von (6.18) und (6.19) lassen sich alle Einträge der Matrix $\mathbf{Q}_{1\infty}$ im Fall $\alpha_1\notin\mathbb{Z}$, $\gamma\notin\mathbb{R}\backslash\{0\}$ berechnen.

7 Zusammenhang der Koordinatensysteme

Zu Anfang dieses Kapitels werden Gebiete angegeben, in denen sich die verallgemeinerten elliptischen Koordinaten $(\xi_1, \xi_2) \in \Omega^2$ als Funktionen von verallgemeinerten Kugelkoordinaten (Polarkoordinaten) $(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{C}^* \times \Omega$ darstellen lassen. Ferner untersuchen wir das analytische Verhalten dieser Funktionen. Durch Verknüpfung dieser mit den Projektionen $\tilde{P}$ und P erhalten wir komplexwertige Funktionen deren Definitionsbereiche in $\widehat{\mathbb{C}^*} \times \widehat{\Omega}$ liegt. Schränkt man diese geeignet ein, so lassen sich Liftungen bezüglich P dieser Funktionen finden.

Wie wir aus Abschnitt 1.2 wissen, hängen die oben genannten Koordinaten mit den kartesischen Koordinaten in folgender Weise zusammen:

$$x_1^2 = \xi_1 \xi_2 = \eta_1 \eta_2 \text{ und } x_2^2 = (1 - \xi_1)(\xi_2 - 1) = \eta_1(1 - \eta_2). \tag{7.1}$$

Aufgrund von

$$\eta_1 = x_1^2 + x_2^2 = \xi_1 + \xi_2 - 1 \tag{7.2}$$

erfüllen $(\xi_1, \xi_2) \in \Omega^2$ genau dann die Gleichungen (7.1), wenn diese zwei voneinander verschiedene Lösungen der algebraischen Gleichung

$$z^2 - (1 + \eta_1)z + \eta_1 \eta_2 = 0, \quad z \in \mathbb{C} \tag{7.3}$$

sind.

Im folgenden bezeichnen wir für $n \geq 2$ und $a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ mit $\overline{a_1, ..., a_n} : [0, 1] \to \mathbb{C}$ den entsprechenden Polygonzug und mit $[a_1, ..., a_n]$ die Spur von $\overline{a_1, ..., a_n}$.

(7.4) Bemerkung, Definition:

Mit der Funktion

$$\psi : \mathbb{C}^* \ni \eta \to \frac{1}{4}\left(\eta + 2 + \frac{1}{\eta}\right) \in \mathbb{C} \tag{7.5}$$

gilt:

i) Zu jedem $(\eta_{10}, \eta_{20}) \in \{(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{C}^* \times \Omega | \eta_2 \neq \psi(\eta_1)\} =: \mathcal{Y}$ gibt es eine Umgebung $\mathcal{U}$ von (η_{10}, η_{20}), in der die Gleichung (7.3) genau zwei voneinander verschiedene holomorphe Lösungen $\xi_{1/2}^{\mathcal{U}} : U \to \Omega$ besitzt.

Diese erfüllen $\left(\partial_j \xi_{1/2}^{\mathcal{U}}\right)(\eta_1, \eta_2) \neq 0$, $j = 1, 2$ für alle $(\eta_1, \eta_2) \in \mathcal{U}$.

Die Funktionen $\xi_{1/2}^{\mathcal{U}}$ lassen sich längs jedes Weges in $\mathcal{Y}$ analytisch fortsetzen.

ii) Für $(\eta_1, \eta_2) \in D := \{(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{C}^* \times \Omega | \psi(\eta_1) \notin [0, \eta_2]\} \subset \mathcal{Y}$ definieren wir

$$\begin{aligned}
\xi_1(\eta_1, \eta_2) &:= \frac{\eta_1 + 1}{2}\left(1 + \left(1 - \frac{4\eta_1\eta_2}{(1 + \eta_1)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\eta_1 + 1}{2}\left(1 + \left(1 - \frac{\eta_2}{\psi(\eta_1)}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&=: \eta_1 \zeta(\eta_1, \eta_2) \neq 0, \\
\xi_2(\eta_1, \eta_2) &:= \frac{\eta_1 \eta_2}{\xi_1(\eta_1, \eta_2)} = \eta_2 \frac{1}{\zeta(\eta_1, \eta_2)} = \frac{\eta_1 + 1}{2}\left(1 - \left(1 - \frac{\eta_2}{\psi(\eta_1)}\right)^{\frac{1}{2}}\right),
\end{aligned}$$

wobei hier mit $z^{\frac{1}{2}}$ der Hauptzweig der Wurzel gemeint ist.
$\xi_1, \xi_2, \zeta : D \to \Omega$ *sind holomorph.*
ξ_1, ξ_2 *lösen die Gleichung (7.3).*

Beweis:
Zu i): $z \in \mathbb{C}$ löst (7.3) genau dann, wenn

$$\left(z - \frac{\eta_1 + 1}{2}\right)^2 = \frac{(\eta_1 + 1)^2}{4} - \eta_1\eta_2 = \eta_1(\psi(\eta_1) - \eta_2).$$

Da für jedes $\eta_0 := (\eta_{10}, \eta_{20}) \in \mathcal{Y}$ eine konvexe Umgebung $\mathcal{U}$ von η_0 existiert mit

$$\eta_1(\psi(\eta_1) - \eta_2) \in \mathbb{C}^*,\ (\eta_1, \eta_2) \in \mathcal{U},$$

so gibt es genau zwei stetige Lösungen $\xi_{1/2}^{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ der Gleichung (7.3). Diese sind holomorph und erfüllen $\xi_1^{\mathcal{U}}(\eta_1, \eta_2) \neq \xi_2^{\mathcal{U}}(\eta_1, \eta_2),\ \forall (\eta_1, \eta_2) \in \mathcal{U}$.
Hieraus folgt, dass sich $\xi_{1/2}^{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ längs jedes Weges in $\mathcal{Y}$ analytisch fortsetzen lässt.
Mit (7.3) gilt für $(\eta_1, \eta_2) \in \mathcal{U}$:

$$\xi_{1/2}^{\mathcal{U}}(\eta_1, \eta_2) \in \{0, 1\} \Rightarrow \eta_1\eta_2 = 0 \vee \eta_1(\eta_2 - 1) = 0 \Rightarrow \text{ Widerspruch.}$$

Ferner folgt aus (7.3): $\left(\xi_{1/2}^{\mathcal{U}}\right)^2 - (\eta_1 + 1)\xi_{1/2}^{\mathcal{U}} + \eta_1\eta_2 = 0$ und somit:

$$2\xi_{1/2}^{\mathcal{U}}\partial_1\xi_{1/2}^{\mathcal{U}} - (\eta_1 + 1)\partial_1\xi_{1/2}^{\mathcal{U}} - \xi_{1/2}^{\mathcal{U}} + \eta_2 = 0 \Leftrightarrow \partial_1\xi_{1/2}^{\mathcal{U}}\left(2\xi_1^{\mathcal{U}} - (\eta_1 + 1)\right) = \xi_{1/2}^{\mathcal{U}} - \eta_2.$$

Aufgrund von $\eta_2^2 - (\eta_1 + 1)\eta_2 + \eta_1\eta_2 = \eta_2(\eta_2 - 1)$ folgt $\xi_{1/2}^{\mathcal{U}}(\eta_1, \eta_2) - \eta_2 \neq 0$, $(\eta_1, \eta_2) \in \mathcal{U}$ und damit $\partial_1\xi_{1/2}^{\mathcal{U}}(\eta_1, \eta_2) \neq 0$, $(\eta_1, \eta_2) \in \mathcal{U}$.
Genauso gilt:

$$2\xi_{1/2}^{\mathcal{U}}\partial_2\xi_{1/2}^{\mathcal{U}} - (\eta_1 + 1)\partial_2\xi_{1/2}^{\mathcal{U}} + \eta_1 = 0 \Leftrightarrow \partial_2\xi_{1/2}^{\mathcal{U}}\left(2\xi_{1/2}^{\mathcal{U}} - (\eta_1 + 1)\right) = -\eta_1.$$

Damit folgt $\partial_2\xi_{1/2}^{\mathcal{U}}(\eta_1, \eta_2) \neq 0$, $(\eta_1, \eta_2) \in \mathcal{U}$.
Zu ii): ξ_1 und ξ_2 sind für $\psi(\eta_1) \neq 0$ und $\frac{\eta_2}{\psi(\eta_1)} \notin [1, \infty]$, $(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{C}^* \times \Omega$ wohldefiniert und damit für $\psi(\eta_1) \notin\ [0, \eta_2]$, $(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{C}^* \times \Omega$.
Die Holomorphie der Funktionen ξ_1, ξ_2, ζ ist sofort ersichtlich. Man prüft sofort nach, dass $\xi_1(\eta_1, \eta_2)$ und $\xi_2(\eta_1, \eta_2)$ für $(\eta_1, \eta_2) \in D$ die Gleichung (7.3) erfüllen und ξ_1, ξ_2, ζ nach Ω abbilden. $\square$

Nun wollen wir ein paar Eigenschaften der ψ Funktion auflisten, die der Leser selbst nachprüfen kann:

(7.6) Bemerkung, Definition: *Sei* $H_\pm := \{z \in \mathbb{C} | \pm \operatorname{Im}(z) > 0\}$.

i) Es gilt $\psi^{-1}(\{0\}) = \{-1\}$, $\psi^{-1}(\{1\}) = \{1\}$ *und* $\psi(\overline{z}) = \overline{\psi(z)}$, $z \in \mathbb{C}^*$ *sowie:*

$$\psi(a) = \psi(b) \Leftrightarrow a = b \vee a = b^{-1},\ a, b \in \mathbb{C}^*.$$

ii) Für $r > 1$ ist $\psi(\{z \in \mathbb{C} | |z| = r\})$ der Rand einer Ellipse mit den Brennpunkten 0 und 1 und es gilt $\psi(\{z \in \mathbb{C} | |z| = r\}) = \psi(\{z \in \mathbb{C} | |z| = r^{-1}\})$.
Zudem gilt: $\psi(\overline{H_+} \cap \partial K_1(0)) = \psi(\overline{H_-} \cap \partial K_1(0)) = [0,1]$, $\psi(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}$, $\psi([1,\infty[) = \psi(]0,1]) = [1,\infty[$ und $\psi(]-\infty,-1]) = \psi([-1,0[) =]\infty, 0]$.

iii) $\psi_0 := \psi|_{\mathbb{C}\backslash \overline{K}_1(0)} : \mathbb{C}\backslash\overline{K}_1(0) \to \mathbb{C}\backslash[0,1]$ ist biholomorph, und

$$\psi_0^{-1} : \mathbb{C}\backslash[0,1] \ni z \to \frac{1 + \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}}{1 - \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}}} \in \mathbb{C}\backslash\overline{K}_1(0)$$

ist die Inverse, wobei mit den Wurzeln die Hauptwerte gemeint sind.
$\psi : K_1(0)\backslash\{0\} \to \mathbb{C}\backslash[0,1]$ ist ebenfalls biholomorph.

iv) $\psi_+ := \psi|_{\overline{H_+}\backslash K_1(0)} : \overline{H_+}\backslash K_1(0) \to \overline{H_+}$ ist eine homöomorphe Abbildung.

v) $\psi_- := \psi|_{\overline{H_-}\backslash K_1(0)} : \overline{H_-}\backslash K_1(0) \to \overline{H_-}$ ist eine homöomorphe Abbildung. Es gilt $\psi_-^{-1}(z) = \overline{\psi_+^{-1}(\overline{z})}$.

(7.7) Bemerkung, Definition:

i) Die biholomorphe Funktion $G : \mathbb{C}^* \times \Omega \ni (\eta_1, \eta_2) \to \left(\frac{1}{\eta_1}, \eta_2\right) \in \mathbb{C}^* \times \Omega$ erfüllt $G(\mathcal{Y}) = \mathcal{Y}$ und $G(D) = D$.

ii) Es gilt: $\eta_1 \cdot \left(\xi_{1/2} \circ G\right)(\eta_1, \eta_2) = \xi_{1/2}(\eta_1, \eta_2)$ für $(\eta_1, \eta_2) \in D$.

iii) Wir definieren $\mathcal{E}(\infty) := \Omega$ sowie

$$\mathcal{E}(\rho) := \{\psi(\eta) \in \mathbb{C} | \eta \in \mathbb{C}^*,\ 1 \leq |\eta| < \rho\}\backslash\{0,1\}, \quad 1 < \rho \in \mathbb{R}.$$

$\mathcal{E}(\rho)$ ($1 < \rho \in \mathbb{R}$) ist eine punktierte Ellipse mit den Brennpunkten 0 und 1, welche $\mathcal{E}(\rho) \subset K_\rho(0)$ erfüllt.

iv) Wir bezeichnen mit $D_I, D_A \subset D$ die Gebiete:

$$\begin{aligned} D_I &:= \bigcup_{0<\rho<1} \left(K_\rho(0) \times \mathcal{E}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right) \subset D, \\ D_A &:= G(D_I) = \bigcup_{1<\rho\in\mathbb{R}} \left(\left(\mathbb{C}\backslash\overline{K}_\rho(0)\right) \times \mathcal{E}(\rho)\right) \subset D. \end{aligned}$$

Beweis:
Zu i): Da für $a, b \in \mathbb{C}^* : \psi(a) = \psi(b) \Leftrightarrow a = b \vee a = \frac{1}{b}$ folgt die Behauptung sofort.
Zu ii): $(\xi_{1/2} \circ G)(\eta_1, \eta_2) = \frac{\frac{1}{\eta_1}+1}{2}\left(1 \pm \left(1 - \frac{\eta_2}{\psi(\eta_1)}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\eta_1}\xi_{1/2}(\eta_1, \eta_2)$, $(\eta_1, \eta_2) \in D$.
Zu iii): Sei $\rho > 1$. Aus $\sup\limits_{\eta_2 \in \mathcal{E}(\rho)} |\eta_2| = \psi(\rho) = \frac{1}{4}\left(\rho + 2 + \frac{1}{\rho}\right) < \frac{1}{4}(\rho + 2\rho + \rho) = \rho$ folgt

$\mathcal{E}(\rho) \subset K_\rho(0)$. Man sieht sofort, dass $\mathcal{E}(\rho) \cup \{0,1\}$ eine Ellipse ist.
Zu iv): Sei $\rho > 1$. Für $\eta_1 \notin K_\rho(0), \eta_2 \in \mathcal{E}(\rho)$ folgt $(\psi(\eta_1), \eta_2) \notin \mathcal{E}(\rho)^2$ und $(\eta_1, \eta_2) \in D$. Wir erhalten dann $M_\rho := \left(\mathbb{C}\backslash\overline{K}_\rho(0)\right) \times \mathcal{E}(\rho) \subset D$ und somit $D_A \subset D$.
Da $D_A = \cup_{\rho>1} M_\rho$ und $M_{\rho_1} \cap M_{\rho_2} = \left(\mathbb{C}\backslash\overline{K}_{\rho_2}(0)\right) \times \mathcal{E}(\rho_1) \neq \emptyset$ für $1 < \rho_1 < \rho_2$, so ist D_A ein Gebiet. Damit ist auch D_I ein Teilgebiet von D. $\square$

Im folgenden Satz werden einige analytische Eigenschaften der Funktionen ξ_1, ξ_2 und ζ bereitgestellt.

(7.8) Satz:

1. *Die Funktionen ξ_1 und ξ_2 erfüllen auf D_A die Funktionalgleichung:*

$$\xi_{1/2}(\eta_1, \eta_2) = 1 - \xi_{1/2}(-\eta_1, 1-\eta_2), \quad (\eta_1, \eta_2) \in D_A. \tag{7.9}$$

   Die Funktionen ξ_1 und ξ_2 erfüllen auf D_I die Funktionalgleichung:

$$\xi_{1/2}(\eta_1, \eta_2) = 1 - \xi_{2/1}(-\eta_1, 1-\eta_2), \quad (\eta_1, \eta_2) \in D_I. \tag{7.10}$$

2. *Es gilt*

   a) $\zeta(\eta_1, \eta_2) = 1 + \frac{1-\eta_2}{\eta_1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\eta_1^2}\right), \quad \frac{1}{\zeta(\eta_1,\eta_2)} = 1 + \frac{\eta_2-1}{\eta_1} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\eta_1^2}\right) \quad (\eta_1 \to \infty)$
   lokal gleichmäßig bezüglich $\eta_2 \in \Omega$.
   Somit hat ξ_1 bezüglich η_1 einen Pol erster Ordnung in ∞ und ξ_2 ist in ∞ bezüglich η_1 durch $\xi_2(\infty, \eta_2) := \eta_2$ holomorph ergänzbar.

   b) $\zeta(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{\eta_1} + (1-\eta_2) + \mathcal{O}(\eta_1), \ \frac{1}{\zeta(\eta_1,\eta_2)} = \eta_1 + (\eta_2 - 1)\eta_1^2 + \mathcal{O}(\eta_1^3),$
   $(\eta_1 \to 0)$ *lokal gleichmäßig bezüglich $\eta_2 \in \Omega$.*
   Somit sind ξ_1, ξ_2 durch $\xi_1(0, \eta_2) := 1, \xi_2(0, \eta_2) := 0$ holomorph ergänzbar.

   c) $\zeta(\eta_1, \eta_2) = \left(1 + \frac{1}{\eta_1}\right)(1 + \mathcal{O}(\eta_2)), \ \frac{1}{\zeta(\eta_1,\eta_2)} = \left(\frac{\eta_1}{1+\eta_1}\right)(1 + \mathcal{O}(\eta_2))$
   $(\eta_2 \to 0)$ *lokal gleichmäßig bezüglich $\eta_1 \in \mathbb{C}^*\backslash\{-1\}$.*
   Somit sind ξ_1, ξ_2 durch $\xi_1(\eta_1, 0) := \eta_1 + 1$, $\xi_2(\eta_1, 0) := 0$ holomorph ergänzbar.

   d) *Im folgenden untersuchen wir das Verhalten von ζ für $\eta_2 \to 1$ auf D_A und auf D_I:*

      i) *Im Fall $(\eta_1, \eta_2) \in D_A$:*
      $\zeta(\eta_1, \eta_2) = 1 + \mathcal{O}(\eta_2 - 1), \ \frac{1}{\zeta(\eta_1,\eta_2)} = 1 + \mathcal{O}(\eta_2 - 1) \ (\eta_2 \to 1)$ *lokal gleichmäßig bezüglich $\eta_1 \in \mathbb{C}\backslash\overline{K}_1(0)$.*
      Somit sind $\xi_1|_{D_A}$, $\xi_2|_{D_A}$ durch $\xi_1|_{D_A}(\eta_1, 1) := \eta_1$ und $\xi_2|_{D_A}(\eta_1, 1) := 1$ holomorph ergänzbar.

      ii) *Im Fall $(\eta_1, \eta_2) \in D_I$:*
      $\zeta(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{\eta_1} + \mathcal{O}(\eta_2 - 1), \ \frac{1}{\zeta(\eta_1,\eta_2)} = \eta_1 + \mathcal{O}(\eta_2 - 1) \ (\eta_2 \to 1)$ *lokal gleichmäßig bezüglich $\eta_1 \in K_1(0)\backslash\{0\}$.*
      Somit sind $\xi_1|_{D_I}$, $\xi_2|_{D_I}$ durch $\xi_1|_{D_I}(\eta_1, 1) := 1$ $\xi_2|_{D_I}(\eta_1, 1) := \eta_1$ holomorph ergänzbar.

3. *Es gilt* $\xi_2(\eta_1,]0,1[) =]0,1[$ *sowie* $\xi_2\left(\frac{1}{\eta_1},]0,1[\right) = \left]0, \frac{1}{\eta_1}\right[$ *für* $\eta_1 \in]-\infty, -1[\cup]1, \infty[\subset \mathbb{R}$.
Ferner gilt:

$$\begin{aligned} &\xi_1(]1,\infty[\times]0,1[) \subset]1,\infty[, \quad \xi_1(]-\infty,-1[\times]0,1[) \subset]-\infty,0[, \\ &\xi_1(]0,1[\times]0,1[) \subset]1,\infty[, \quad \xi_1(]-1,0[\times]0,1[) \subset]0,1[. \end{aligned}$$

Beweis:
Zu 1.: Sei $(\eta_1, \eta_2) \in D_A$. Dann gilt: $(-\eta_1, 1-\eta_2) \in D_A$ und

$$\begin{aligned} & \left(1 - \xi_{1/2}(-\eta_1, 1-\eta_2)\right)^2 - (1+\eta_1)(1 - \xi_{1/2}(-\eta_1, 1-\eta_2)) + \eta_1\eta_2 \\ = \ & \xi_{1/2}^2(-\eta_1, 1-\eta_2) - 2\xi_{1/2}(-\eta_1, 1-\eta_2) + (1+\eta_1)\xi_{1/2}(-\eta_1, 1-\eta_2) \\ & -(\eta_1+1) + 1 + \eta_1\eta_2 \\ = \ & \xi_{1/2}^2(-\eta_1, 1-\eta_2) - (1-\eta_1)\xi_{1/2}(-\eta_1, 1-\eta_2) + \eta_1(1-\eta_2) = 0 \end{aligned}$$

Somit sind die Funktionen $\check{\xi}_{1/2} : D_A \to \Omega$, mit

$$\check{\xi}_{1/2}(\eta_1, \eta_2) := 1 - \xi_{1/2}(-\eta_1, 1-\eta_2), \ (\eta_1, \eta_2) \in D_A \tag{7.11}$$

ebenfalls Lösungen von (7.3).
Für $\eta_1 \in]1, \infty[$ und $\eta_2 \in]0,1[$ folgt $(\eta_1, \eta_2) \in D_A$ und

$$\begin{aligned} \xi_{1/2}(\eta_1, \eta_2) &= \frac{\eta_1+1}{2}\left(1 \pm \left(1 - \frac{\eta_2}{\psi(\eta_1)}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{\eta_1+1}{2} \pm \left(\frac{(\eta_1+1)^2}{4} - \eta_1\eta_2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 1 + \frac{\eta_1 - 1}{2} \pm \left(\frac{(\eta_1-1)^2}{4} + \eta_1(1-\eta_2)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 1 - \frac{1-\eta_1}{2}\left(1 \pm \left(1 - \frac{1-\eta_2}{\psi(-\eta_1)}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= 1 - \xi_{1/2}(-\eta_1, 1-\eta_2) = \check{\xi}_{1/2}(\eta_1, \eta_2). \end{aligned} \tag{7.12}$$

Aufgrund von (7.4)i) folgt dann $\xi_j = \check{\xi}_j$ $(j = 1,2)$ auf einem Teilgebiet von D_A und über die Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung $\xi_j = \check{\xi}_j$ $(j = 1,2)$.
Sei nun $(\eta_1, \eta_2) \in D_I$. Dann gilt $\left(\frac{1}{\eta_1}, \eta_2\right) \in D_A$ und mit (7.7)ii) folgt:

$$\begin{aligned} \xi_{1/2}(\eta_1, \eta_2) &= \eta_1 \xi_{1/2}\left(\frac{1}{\eta_1}, \eta_2\right) = \eta_1\left(1 - \xi_{1/2}\left(-\frac{1}{\eta_1}, 1-\eta_2\right)\right) \\ &= \eta_1\left(1 + \frac{1}{\eta_1}\xi_{1/2}(-\eta_1, 1-\eta_2)\right) = \eta_1 + \xi_{1/2}(-\eta_1, 1-\eta_2) \\ &\overset{(7.2)}{=} 1 - \xi_{2/1}(-\eta_1, 1-\eta_2), \quad (\eta_1, \eta_2) \in D_I. \end{aligned}$$

Zu 2.: Für $(\eta_1,\eta_2)\in D$ mit $\left|\frac{\eta_2}{\psi(\eta_1)}\right|<1$ gilt (vgl. (7.4)ii)):

$$\begin{aligned}
\zeta(\eta_1,\eta_2) =&\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\eta_1}\right)\left(1+\left(1-\frac{\eta_2}{\psi(\eta_1)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\\
=&\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\eta_1}\right)\left(2-\frac{2\eta_2}{\left(1+\frac{1}{\eta_1}\right)(\eta_1+1)}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\binom{\frac{1}{2}}{n}\left(\frac{\eta_2}{\psi(\eta_1)}\right)^n\right)\\
=&1+\frac{1}{\eta_1}-\frac{\eta_2}{(\eta_1+1)}+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\binom{\frac{1}{2}}{n}2^{2n-1}\frac{1}{\left(1+\eta_1^{-1}\right)^{n-1}}\left(\frac{\eta_2}{(\eta_1+1)}\right)^n .
\end{aligned}$$

Zu a): Sei $K\subset\Omega$ kompakt. Wir wählen $\rho>1$ mit $K\subset\mathcal{E}(\rho)$ und $\left|\frac{\eta_2}{\psi(\eta_1)}\right|<1$ für $(\eta_1,\eta_2)\in\left(\mathbb{C}\backslash\overline{K_\rho(0)}\right)\times K\subset D$. Damit folgt

$$\zeta(\eta_1,\eta_2)=1+\frac{1-\eta_2}{\eta_1}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\eta_1^2}\right),\quad (\eta_1\to\infty)$$

gleichmäßig bezüglich $\eta_2\in K$. Die zweite Behauptung folgt hieraus über die Neumannsche Reihe.

Zu b): Sei $K\subset\Omega$ kompakt. Wir wählen $\rho>1$ mit $K\subset\mathcal{E}(\rho)$ und $\left|\frac{\eta_2}{\psi(\eta_1)}\right|<1$ für $(\eta_1,\eta_2)\in K_\rho(0)\times K\subset D_I$. Mit (7.7) folgt

$$\begin{aligned}
\zeta(\eta_1,\eta_2) &= \frac{1}{\eta_1}\xi_1(\eta_1,\eta_2)=\frac{\eta_1}{\eta_1}\xi_1\left(\frac{1}{\eta_1},\eta_2\right)=\frac{1}{\eta_1}\zeta\left(\frac{1}{\eta_1},\eta_2\right)\\
&= \frac{1}{\eta_1}\left(1+(1-\eta_2)\eta_1+\mathcal{O}\left(\eta_1^2\right)\right)(\eta_1\to 0)
\end{aligned}$$

gleichmäßig bezüglich $\eta_2\in K$. Die zweite Behauptung folgt hieraus über die Neumannsche Reihe.

Zu c): Aufgrund von $\psi(-1)=0$ liegen die Punkte $(-1,\eta_2)$ nicht in D für $\eta_2\in\Omega$. Wir betrachten daher $K\subset\mathbb{C}^*\backslash\{-1\}$ kompakt.

Für $0<\rho<1$ mit $\rho<\operatorname{dist}(\psi(K),0)$ gilt $K\times K_\rho(0)\subset D$ und $\left|\frac{\eta_2}{\psi(\eta_1)}\right|<1$, für $(\eta_1,\eta_2)\in K\times K_\rho(0)$. Mit der Reihe folgt dann:

$$\zeta(\eta_1,\eta_2)=\left(1+\frac{1}{\eta_1}\right)\left(1+\mathcal{O}(\eta_2)\right),\ (\eta_2\to 0)\text{ gleichmäßig bezüglich }\eta_1\in K.$$

Die zweite Behauptung folgt hieraus über die Neumannsche Reihe.

Zu d): Zu i): Mit der Funktionalgleichung (7.9) erhält man für $(\eta_1,\eta_2)\in D_A$:

$$\zeta(\eta_1,\eta_2)=\frac{1}{\eta_1}\xi_1(\eta_1,\eta_2)=\frac{1}{\eta_1}-\frac{1}{\eta_1}\xi_1(-\eta_1,1-\eta_2)=\frac{1}{\eta_1}+\zeta(-\eta_1,1-\eta_2)$$

und damit unter Verwendung von c):

$$\zeta(\eta_1, \eta_2) = 1 + \mathcal{O}(\eta_2 - 1), \ (\eta_2 \to 1) \text{ lokal gleichmäßig bezüglich } \eta_1.$$

Die zweite Behauptung folgt hieraus über die Neumannsche Reihe.
Zu ii): Mit der Funktionalgleichung (7.10) erhält man für $(\eta_1, \eta_2) \in D_I$:

$$\begin{aligned} \zeta(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{\eta_1}\xi_1(\eta_1, \eta_2) &= \frac{1}{\eta_1}(1 - \xi_2(-\eta_1, 1 - \eta_2)) \\ &= \frac{1}{\eta_1}\left(1 - \frac{1 - \eta_2}{\zeta(-\eta_1, 1 - \eta_2)}\right) \end{aligned}$$

und damit unter Verwendung von c):

$$\zeta(\eta_1, \eta_2) = \frac{1}{\eta_1}(1 + \mathcal{O}(\eta_2 - 1)), \ (\eta_2 \to 1)$$

lokal gleichmäßig bezüglich η_1. Die zweite Behauptung folgt hieraus über die Neumannsche Reihe.
Zu 3.: Es gilt $(]-\infty, -1[\cup]1, \infty[) \times]0, 1[\subset D_A$. Sei $\eta_1 \in]-\infty, -1[\cup]1, \infty[$ fest gewählt. Dann gilt: $\xi_2(\eta_1, \cdot) :]0, 1[\to \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$. Aus der partiellen Stetigkeit von ξ_2, $\lim_{\eta_2 \to 0+} \xi_2(\eta_1, \eta_2) = 0$ und $\lim_{\eta_2 \to 1-} \xi_2(\eta_1, \eta_2) = 1$ folgt $\xi_2(\eta_1,]0, 1[) =]0, 1[$.
Aufgrund von (7.7) gilt $\xi_2\left(\frac{1}{\eta_1}, \eta_2\right) = \frac{1}{\eta_1}\xi_2(\eta_1, \eta_2)$, $(\eta_1, \eta_2) \in D$ und damit die nächste Behauptung.
Aus $\xi_1 + \xi_2 - 1 = \eta_1$ folgt für $(\eta_1, \eta_2) \in]1, \infty[\times]0, 1[$:

$$\xi_1(\eta_1, \eta_2) = \eta_1 + 1 - \xi_2(\eta_1, \eta_2) > \eta_1 > 1$$

und mit (7.9) dann $\xi_1(]-\infty, -1[\times]0, 1[) \subset]-\infty, 0[$.
Aus $\xi_1(]0, 1[\times]0, 1[), \xi_1(]-1, 0[\times]0, 1[) \subset \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}$ zusammenhängend und $\lim_{\eta_2 \to 0} \xi_1(\eta_1, \eta_2) = 1 + \eta_1$ folgt

$$\xi_1(]0, 1[\times]0, 1[) \subset]1, \infty[\text{ sowie } \xi_1(]-1, 0[\times]0, 1[) \subset]0, 1[.$$

□

Wir verallgemeinern nun die Funktionen ξ_1 und ξ_2 wie folgt:
(7.13) Definition:
Sei $\tilde{D} := \left\{(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \widehat{\mathbb{C}^*} \times \widehat{\Omega} \middle| \left(\tilde{P}(\hat{\eta}_1), P(\hat{\eta}_2)\right) \in D\right\}$ *und*

$$\widetilde{\xi_{1/2}} : \tilde{D} \ni (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \to \xi_{1/2}(\tilde{P}(\hat{\eta}_1), P(\hat{\eta}_2)) \in \Omega.$$

Unser Ziel ist es, mit Hilfe von Satz (9.13) aus dem Anhang Liftungen für diese Funktionen bezüglich P zu finden. Um jedoch Satz (9.13) anwenden zu können, muss der Definitionsbereich der zu liftenden Funktion eine einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit sein, was $\tilde{D}$ nicht ist (Dies ist leicht zu zeigen). Da es wegen der späteren Entwicklungssätze nicht sinnvoll ist, universelle Überlagerungen von $\mathcal{Y}$ oder von D als Definitionsbereiche zu betrachten, werden wir die Funktionen $\widetilde{\xi_1}, \widetilde{\xi_2}$ auf einfach zusammenhängende Teilgebiete von $\tilde{D}$ einschränken.

(7.14) Bezeichnung:

Seien M_1, M_2 und M drei beliebige Mengen mit $M \subset M_1 \times M_2$.
Dann bezeichnet man für $(\eta_1, \eta_2) \subset M_1 \times M_2$ wie folgt die Schnitte

$$M^{2,\eta_1} := \{\eta_2 \in M_2 | (\eta_1, \eta_2) \in M\}\,,\ M^{1,\eta_2} := \{\eta_1 \in M_1 | (\eta_1, \eta_2) \in M\}\,.$$

(7.15) Bemerkung, Definition:

i) Für $0 < \rho \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir $\hat{K}_\rho := \left\{\hat{z} \in \widehat{\mathbb{C}^*} | z \in K_\rho(0)\right\}$.
Dann sind $\hat{K}_\rho$ und $\widehat{\mathbb{C}^*} \backslash \overline{\hat{K}_\rho}$ einfach zusammenhängende Teilgebiete von $\widehat{\mathbb{C}^*}$.

ii) Für $1 < \rho \leq \infty$ ist $\widehat{\mathcal{E}}(\rho) := \left\{\hat{z} \in \widehat{\Omega} | z \in \mathcal{E}(\rho)\right\}$ einfach zusammenhängendes Teilgebiet von $\widehat{\Omega}$.

iii)

$$\hat{D}_I := \left\{(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \widehat{\mathbb{C}^*} \times \widehat{\Omega} | (\eta_1, \eta_2) \in D_I\right\} = \bigcup_{0<\rho<1} \left(\hat{K}_\rho \times \widehat{\mathcal{E}}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right)$$

und

$$\hat{D}_A := \left\{(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \widehat{\mathbb{C}^*} \times \widehat{\Omega} | (\eta_1, \eta_2) \in D_A\right\} = \bigcup_{1<\rho<\infty} \left(\left(\widehat{\mathbb{C}^*} \backslash \overline{\hat{K}_\rho}\right) \times \widehat{\mathcal{E}}\,(\rho)\right)$$

sind einfach zusammenhängende Teilgebiete von $\tilde{D}$.

Beweis:
Zu i): Dies folgt aus Satz (9.20) aus dem Anhang.
Zu ii): Sei $\rho > 1$. Die Menge $\widehat{\mathcal{E}}(\rho)$ ist offen, da P stetig ist.
Nun zeigen wir, dass $\widehat{\mathcal{E}}(\rho)$ kurvenzusammenhängend ist. Seien $\hat{z}_0, \hat{z}_1$ in $\widehat{\mathcal{E}}(\rho)$. Dann existiert eine Kurve $\hat{\varphi} : [0,1] \to \widehat{\Omega}$ mit $\hat{\varphi}(0) = \hat{z}_0$ und $\hat{\varphi}(1) = \hat{z}_1$.
Wir wählen eine Kurve $\varphi_1 : [0,1] \to \mathcal{E}(\rho)$ welche zu $P \circ \hat{\varphi}$ in Ω homotop ist und betrachten ihre Liftung $\hat{\varphi}_1 : [0,1] \to \widehat{\Omega}$ bezüglich P mit $\hat{\varphi}_1(0) = \hat{z}_0$. Diese Kurve ist die gesuchte Kurve (Satz (9.9), Anhang).
Nun zeigen wir, dass $\widehat{\mathcal{E}}(\rho)$ einfach zusammenhängend ist.
Sei $\hat{\varphi} : [0,1] \to \widehat{\Omega}$ eine geschlossene Kurve in $\widehat{\mathcal{E}}(\rho)$.
Da $\widehat{\Omega}$ einfach zusammenhängend ist, existiert ein $\mathbf{\Phi} : [0,1] \times [0,1] \to \widehat{\Omega}$ mit

$$\mathbf{\Phi} \text{ stetig},\ \mathbf{\Phi}(\cdot, 0) = \hat{\varphi}, \mathbf{\Phi}(\cdot, 1) = \hat{\varphi}(0), \mathbf{\Phi}(0, \tau) = \mathbf{\Phi}(1, \tau) = \hat{\varphi}(0),\ \tau \in [0,1].$$

Ferner seien $r, R \in \mathbb{R}$ mit $1 < r < \rho < R$, Spur $(\hat{\varphi}) \subset \widehat{\mathcal{E}}(r)$ und $\mathbf{\Phi}\left([0,1] \times [0,1]\right) \subset \widehat{\mathcal{E}}(R)$. Wir definieren die Abbildung

$$g : K_R(0)\backslash K_r(0) \to K_\rho(0)\backslash K_r(0),\ g(z) := \frac{z}{|z|}\left(r + (|z| - r)\frac{\rho - r}{R - r}\right).$$

Diese ist stetig und erfüllt $g(z) = z$ für $|z| = r$.
Mit ψ_0 aus (7.6) ist dann

$$f : \mathcal{E}(R) \to \mathcal{E}(\rho), \quad f(z) := \begin{cases} \psi_0 \circ g \circ \psi_0^{-1}(z), & z \in \mathcal{E}(R)\backslash\mathcal{E}(r) \\ z, & z \in \mathcal{E}(r) \end{cases}$$

ebenfalls stetig und damit auch $f \circ P \circ \mathbf{\Phi} : [0,1] \times [0,1] \to \mathcal{E}(\rho)$.
Mit Satz (9.13) existiert eine Liftung $\mathbf{\Phi}_1 : [0,1] \times [0,1] \to \widehat{\mathcal{E}}(\rho)$ von $f \circ P \circ \mathbf{\Phi}$, mit $\mathbf{\Phi}_1(0,0) = \hat{\varphi}(0)$. $\mathbf{\Phi}_1$ ist dann die gesuchte Homotopie (Satz (9.9), Anhang).
Zu iii): Für $0 < \rho < 1$ ist $M_\rho := \hat{K}_\rho \times \widehat{\mathcal{E}}\left(\frac{1}{\rho}\right)$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, aufgrund von i) und ii).
Da $M_\rho \cap M_{\tilde{\rho}} \neq \emptyset$ für alle $0 < \rho, \tilde{\rho} < 1$, so ist D_I ein Gebiet.
Sei nun $\varphi : [0,1] \to \hat{D}_I$ eine geschlossene Kurve.
Wegen Spur(φ) kompakt existieren $\rho_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, .., n$ mit

$$0 < \rho_1 < ... < \rho_n < 1 \text{ und Spur}(\varphi) \subset \bigcup_{j=1}^{n} M_{\rho_j} = \left(\hat{K}_{\rho_n} \times \widehat{\mathcal{E}}\left(\frac{1}{\rho_1}\right)\right).$$

Damit ist $\bigcup\limits_{j=1}^{n} M_{\rho_j}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Also ist φ in D_I nullhomotop.
Auf analoge Weise folgt, dass $\hat{D}_A$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist. $\square$

Wir werden nun für $\hat{D}_I$ und $\hat{D}_A$ einfach zusammenhängende Obergebiete angeben, auf denen wir Liftungen der Funktionen $\widetilde{\xi}_1$, $\widetilde{\xi}_1$ aus (7.13) definieren. Die Gebiete sind so gewählt, dass die Liftungen Funktionalgleichungen erfüllen, die denen in (7.9) und (7.10) entsprechen.

(7.16) Satz,Definition:

Mittels des natürlichen Definitionsbereiches der Funktionen $\check{\xi}_{1/2}$ aus (7.11)

$$\check{D} := \{(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{C}^* \times \Omega | (-\eta_1, 1 - \eta_2) \in D\}$$

definieren wir

$$S := D \cap \check{D} = \{(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{C}^* \times \Omega | \psi(\eta_1) \notin [0, \eta_2, 1]\} \subset D$$

und

$$\tilde{S} := \left\{(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \widehat{\mathbb{C}^*} \times \widehat{\Omega} | (\tilde{P}(\hat{\eta}_1), P(\hat{\eta}_2)) \in S\right\} \subset \tilde{D}.$$

Hierfür gilt:

1. *S ist offen und besteht aus zwei Zusammenhangskomponenten $S_I, S_A \subset \mathbb{C}^* \times \Omega$ mit $D_I \subset S_I$ und $D_A \subset S_A$.*
   G aus Bemerkung (7.7) bildet S_I biholomorph auf S_A ab.
   Auf S_I gilt die Funktionalgleichung (7.9) und auf S_A gilt die Funktionalgleichung (7.10).

2. *$\tilde{S}$ ist offen und besteht aus zwei einfach zusammenhängenden Zusammenhangskomponenten*

   $$\hat{S}_I := \{(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \widehat{\mathbb{C}^*} \times \widehat{\Omega} | (\eta_1, \eta_2) \in S_I\}, \ \hat{S}_A := \{(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \widehat{\mathbb{C}^*} \times \widehat{\Omega} | (\eta_1, \eta_2) \in S_A\},$$

   welche durch die Funktion

   $$\hat{G} : \widehat{\mathbb{C}^*} \times \widehat{\Omega} \ni (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \to (\hat{Q}(\hat{\eta}_1), \hat{\eta}_2) \in \widehat{\mathbb{C}^*} \times \widehat{\Omega}$$

   homöomorph aufeinander abgebildet werden, wobei $\hat{Q}$ in (2.22) definiert wurde.
   $\hat{S}_I$ bzw. $\hat{S}_A$ ist die universelle Überlagerungsfläche von S_I bzw. S_A.

Beweis:
Zu 1.: Da $\psi(-\eta_1) = 1 - \psi(\eta_1)$ für $\eta_1 \in \mathbb{C}^*$, so folgt

$$(\eta_1, \eta_2) \in \check{D} \Leftrightarrow 1 - \psi(\eta_1) = \psi(-\eta_1) \notin [0, 1 - \eta_2] \Leftrightarrow \psi(\eta_1) \notin [1, \eta_2].$$

Somit gilt $S = \check{D} \cap D = \{(\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{C}^* \times \Omega | \psi(\eta_1) \notin [0, \eta_2, 1]\}$.
Als erstes wollen wir beweisen, dass S aus zwei offenen Zusammenhangskomponenten besteht. Wir betrachten hierfür die Homöomorphismen

$$\psi_\pm : \overline{H}_\pm \backslash K_1(0) \ni z \to \psi(z) \in \overline{H}_\pm$$

aus der Bemerkung (7.6) und definieren hiermit die stetigen Funktionen

$$\varphi_{\pm,1}, \varphi_{\pm,2} : \Omega \cap \overline{H}_\pm \times [0,1] \to \mathbb{C}^*$$

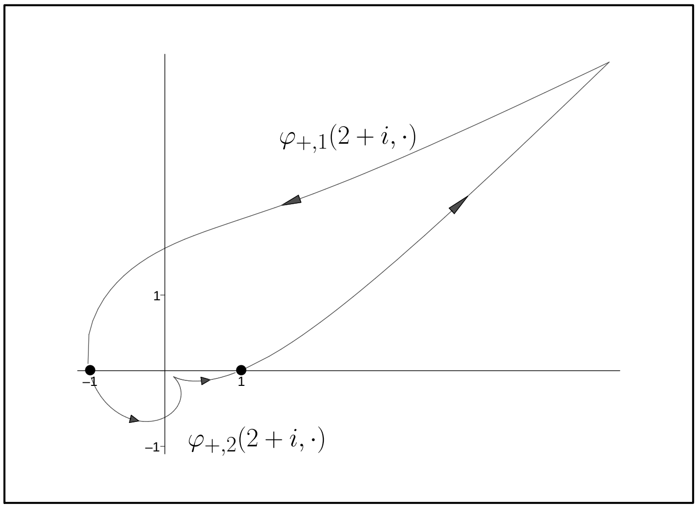
durch

$$\begin{aligned} \varphi_{+,1}(\eta_2, t) &:= \psi_+^{-1}(\overline{1, \eta_2, 0}(t)), \quad \varphi_{+,2}(\eta_2, t) := \frac{1}{\psi_+^{-1}}(\overline{0, \eta_2, 1}(t)), \\ &\qquad \text{für } (\eta_2, t) \in \left(\Omega \cap \overline{H}_+\right) \times [0,1], \\ \varphi_{-,1}(\eta_2, t) &:= \frac{1}{\psi_-^{-1}}(\overline{1, \eta_2, 0}(t)), \quad \varphi_{-,2}(\eta_2, t) := \psi_-^{-1}(\overline{0, \eta_2, 1}(t)), \\ &\qquad \text{für } (\eta_2, t) \in \left(\Omega \cap \overline{H}_-\right) \times [0,1]. \end{aligned}$$

Aufgrund von $\varphi_{\pm,1}(\eta_2, 1) = \varphi_{\pm,2}(\eta_2, 0) = -1$ für alle $\eta_2 \in \Omega \cap \overline{H}_\pm$ sind die Funktionen $\varphi_\pm : \left(\Omega \cap \overline{H}_\pm\right) \times [0,1] \to \mathbb{C}^*$, welche wir durch die Zusammensetzung von Kurven (man betrachte hierzu (9.22))

$$\varphi_\pm(\eta_2, \cdot) := \varphi_{\pm,1}(\eta_2, \cdot) + \varphi_{\pm,2}(\eta_2, \cdot)$$

Abbildung 5: Spur von $\varphi_+(2+i,\cdot)$



definieren, ebenfalls stetige Funktionen. Es lässt sich sofort erkennen, dass es sich für festes $\eta_2 \in \Omega$ bei den Kurven $\varphi_\pm(\eta_2,\cdot)$ um Jordankurven handelt, welche die Null in positiver Richtung einmal umlaufen.

Aufgrund von $\lim\limits_{\eta_1\to\infty} \psi(\eta_1) = \lim\limits_{\eta_1\to 0} \psi(\eta_1) = \infty$ existiert eine stetige Fortsetzung $\psi^{0,\infty}$: $\mathbb{C}\cup\{\infty\} \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ von ψ mit $\psi^{0,\infty}(0) = \psi^{0,\infty}(\infty) = \infty$. Dann gilt

$$S \subset S^{0,\infty} := \left\{(\eta_1,\eta_2) \in (\mathbb{C}\cup\{\infty\}) \times \Omega | \psi^{0,\infty}(\eta_1) \notin [0,\eta_2,1]\right\}.$$

Bezeichnet man für eine geschlossene Kurve $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ und für ein
$z \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}\backslash\mathrm{Spur}(\varphi)$ mit $u_\varphi(z)$ die Umlaufzahl von φ bezüglich z, so definieren wir hiermit die Funktionen

$$u_\pm : \{(\eta_1,\eta_2) \in S^{0,\infty} | \pm\,\mathrm{Im}(\eta_2) \geq 0\} =: D_{u_\pm} \ni (\eta_1,\eta_2) \to u_{\varphi_\pm(\eta_2,\cdot)}(\eta_1) \in \{0,1\}.$$

Wir zeigen nun, dass $S^{0,\infty}$ offen ist und $u_\pm$ stetig ist.
Sei $(\eta_1,\eta_2) \in S^{0,\infty}$ mit $\mathrm{Im}(\eta_2) > 0$.
Für $0 < \varepsilon < 1$ bezeichnen mit $X_\varepsilon \subset \Omega$ die offene und beschränkte Menge, die von

$$\left[0, \eta_2 + \left(\frac{1}{2} - \eta_2\right)\varepsilon, 1\right] \quad \text{und} \left[0, \eta_2 - \left(\frac{1}{2} - \eta_2\right)\varepsilon, 1\right]$$

eingeschlossen wird. Wir wählen $\varepsilon > 0$ klein genug, so dass $\psi^{0,\infty}(\eta_1) \notin \overline{X_\varepsilon}$.
Hierfür existiert ein $\delta > 0$ mit $K_\delta(\eta_2) \subset X_\varepsilon$.
Zudem gilt $\eta_1 \notin \psi_+^{-1}\left(\overline{X_\varepsilon}\right) \cup \frac{1}{\psi_+^{-1}}\left(\overline{X_\varepsilon}\right)$ und damit existiert ein $\rho > 0$ mit
$K_\rho(\eta_1) \cap \left(\psi_+^{-1}\left(\overline{X_\varepsilon}\right) \cup \frac{1}{\psi_+^{-1}}\left(\overline{X_\varepsilon}\right)\right) = \emptyset$. Also ist $K_\rho(\eta_1) \times K_\delta(\eta_2) \subset S^{0,\infty}$.
Da $\mathrm{Spur}\varphi_+(a,\cdot) \subset \left(\overline{X_\varepsilon}\right) \cup \frac{1}{\psi_+^{-1}}\left(\overline{X_\varepsilon}\right)$ $(a \in K_\delta(\eta_2))$ und φ_+ stetig ist, so sind $\varphi_+(a,\cdot)$

und $\varphi_+(b,\cdot)$ $(a,b \in K_\delta(\eta_2))$ homotop in $\mathbb{C}^*\backslash K_\rho(\eta_1)$. Hieraus zeigt man leicht, dass u_+ auf $K_\rho(\eta_1)\times K_\delta(\eta_2)$ konstant ist.
Für $(\eta_1,\eta_2)\in S^{0,\infty}$ mit $\mathrm{Im}(\eta_2)<0$ gehen wir analog vor.
Für $(\eta_1,\eta_2)\in S^{0,\infty}$ mit $\mathrm{Im}(\eta_2)=0$ gilt

$$\mathrm{Spur}\varphi_+(\eta_2,\cdot)=\mathrm{Spur}\varphi_-(\eta_2,\cdot)=\begin{cases}\partial K_1(0), & \eta_2\in]0,1[\\ \partial K_1(0)\cup\left[\frac{1}{\psi_+^{-1}(\eta_2)},\psi_+^{-1}(\eta_2)\right], & \eta_2\in\mathbb{R}\backslash[0,1]\end{cases}. \tag{7.17}$$

Wir wählen ein $\varepsilon>0$ klein genug mit

$$\eta_1\notin\{z\in\mathbb{C}^*|\ \mathrm{dist}\,(z,\mathrm{Spur}\varphi_+(\eta_2,\cdot))<\varepsilon\}=:Y_\varepsilon.$$

Da $\varphi_\pm$ stetig ist, existiert ein $\delta>0$ mit $K_\delta(\eta_2)\subset\Omega$ und $\varphi_\pm(a,\cdot)\in Y_\varepsilon$ $(a\in K_\delta(\eta_2))$. Wählt man ein $\rho>0$ mi $K_\rho(\eta_1)\in\mathbb{C}^*\backslash\overline{Y_\varepsilon}$, so gilt $K_\rho(\eta_1)\times K_\delta(\eta_2)\subset S^{0,\infty}$.
Analog zu oben folgt die Stetigkeit von $u_\pm$ in (η_1,η_2).
Aufgrund von (7.17) gilt $u_+(\eta_1,\eta_2)=u_-(\eta_1,\eta_2)$ $\big((\eta_1,\eta_2)\in D_{u_+}\cap D_{u_-}\big)$ und somit lassen sich u_+ und u_- zu einer stetigen Funktion

$$u:S^{0,\infty}\to\{0,1\}\text{ mit }u(\eta_1,\eta_2):=\begin{cases}u_+(\eta_1,\eta_2), & \text{für }(\eta_1,\eta_2)\in D_{u_+}\\ u_-(\eta_1,\eta_2), & \text{für }(\eta_1,\eta_2)\in D_{u_-}\end{cases}$$

zusammensetzen. Mit Hilfe dieser definieren wir

$$\begin{aligned}S_I^{0,\infty}&:=\left\{(\eta_1,\eta_2)\in S^{0,\infty}|u(\eta_1,\eta_2)=1\right\},\ S_I:=S_I^{0,\infty}\cap S,\\ S_A^{0,\infty}&:=\left\{(\eta_1,\eta_2)\in S^{0,\infty}|u(\eta_1,\eta_2)=0\right\},\ S_A:=S_A^{0,\infty}\cap S.\end{aligned}$$

Aufgrund der Stetigkeit von u sind $S_I^{0,\infty}$, $S_A^{0,\infty}$ in $S^{0,\infty}$ offene Mengen mit $S_I^{0,\infty}\dot\cup S_A^{0,\infty}=S^{0,\infty}$ und S_I, S_A in S offene Mengen mit $S_I\dot\cup S_A=S$.
Als nächstes zeigen wir, dass G die Mengen S_I und S_A biholomorph aufeinander abbildet.
Da $\mathrm{Spur}\varphi_+\left(\frac{1}{2},\cdot\right)=\partial K_1(0)$, ist $u\left(0,\frac{1}{2}\right)=1$ und damit gilt aufgrund der Stetigkeit von u und $\{0\}\times\Omega\subset S^{0,\infty}$ für alle $\eta_2\in\Omega$: $u(0,\eta_2)=1$, also $0\in S_I^{1,\eta_2}$. Die Funktion

$$\sigma:\mathbb{C}\cup\{\infty\}\ni z\to\frac{1}{z}\in\mathbb{C}\cup\{\infty\},$$

erfüllt $\sigma\left(\mathrm{Spur}\left(\varphi(\eta_2,\cdot)\right)\right)=\mathrm{Spur}\left(\varphi(\eta_2,\cdot)\right)$ für alle $\eta_2\in\Omega$ und bildet somit $\left(S_I^{0,\infty}\right)^{1,\eta_2}$ und $\left(S_A^{0,\infty}\right)^{1,\eta_2}$ biholomorph aufeinander ab. Daher ist $\tilde G:=(\sigma,\mathrm{id}_\Omega):S_I^{0,\infty}\to S_A^{0,\infty}$ biholomorph, und mit $\tilde G\left(\{0\}\times\Omega\right)=\{\infty\}\times\Omega$ folgt dann die Biholomorphie von $\tilde G|_{S_I}=G:S_I\to S_A$.
Wenn wir im zweiten Teil des Beweises gezeigt haben, dass $\hat S_I$ und $\hat S_A$ zusammenhängend sind, so folgt dies auch aus der Stetigkeit von $(\tilde P,P):\widehat{\mathbb{C}^*}\times\widehat\Omega\to\mathbb{C}^*\times\Omega$ für S_I und S_A.
Zu 2.: Die Mengen $\hat S_A$ und $\hat S_I$ sind wegen der Stetigkeit von $(\tilde P,P):\widehat{\mathbb{C}^*}\times\widehat\Omega\to\mathbb{C}^*\times\Omega$

offen in $\tilde{S}$ und erfüllen $\tilde{S} = \hat{S}_I \dot{\cup} \hat{S}_A$.
Aus $D_I \subset S_I$, $D_A \subset S_A$ folgt $\hat{D}_A \subset \hat{S}_A$, $\hat{D}_I \subset \hat{S}_I$ und mit $G(S_I) = S_A$, $G(S_A) = S_I$ folgt $\hat{G}(\hat{S}_I) \subset \hat{S}_A$, $\hat{G}(\hat{S}_A) \subset \hat{S}_I$. Da $\hat{G} \circ \hat{G} = \mathrm{id}_{\widehat{\mathbb{C}^*} \times \widehat{\Omega}}$, so bildet $\hat{G}$ die Mengen $\hat{S}_A$ und $\hat{S}_I$ homöomorph aufeinander ab.
Wir zeigen nun, dass $\hat{S}_A$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist.
Mit $\hat{G}(\hat{S}_A) = \hat{S}_I$ folgt dies dann auch für $\hat{S}_I$.
Hierzu beweisen wir folgendes Lemma:

(7.18) Lemma: *Seien $\hat{z}_1, \hat{z}_2 \in \widehat{\Omega}$. Dann sind die Mengen $\hat{S}_A^{1,\hat{z}_j}$, $j = 1, 2$, einfach zusammenhängende Gebiete und $\hat{S}_A^{1,\hat{z}_1} \cap \hat{S}_A^{1,\hat{z}_2} \neq \emptyset$, ist ein Gebiet.*

Beweis: Da es sich bei festem $\hat{z} \in \widehat{\Omega}$ mit $\pm \operatorname{Im}(z) \geq 0$ bei $\varphi_\pm(z, \cdot)$ um eine Jordankurve handelt, folgt nach dem Jordanschen Kurvensatz, dass $\left(S_I^{0,\infty}\right)^{1,z}$ einfach zusammenhängend ist, und somit lässt sich aufgrund des Riemannschen Abbildungssatzes $S_I^{1,z}$ biholomorph auf $K_1(0)\backslash\{0\}$ abbilden. Dies gilt ebenso für $S_A^{1,z}$, da $\sigma : S_A^{1,z} \ni z \to \frac{1}{z} \in S_I^{1,z}$ biholomorph ist .
Seien nun $\hat{a}, \hat{b} \in \hat{S}_A^{1,\hat{z}} = \{\hat{\eta} \in \widehat{\mathbb{C}^*} | (\eta, z) \in S_A\} = \tilde{P}^{-1}(S_A^{1,z})$ und $\hat{\varphi}_1 : [0,1] \to \widehat{\mathbb{C}^*}$ eine stetige Kurve mit $\hat{\varphi}_1(0) = \hat{a}$ und $\hat{\varphi}_1(1) = \hat{b}$.
Dann gibt es einen Weg $\varphi_2 : [0,1] \to S_A^{1,z}$, der zu $\varphi_1 := \tilde{P} \circ \hat{\varphi}_1$ in $\mathbb{C}^*$ homotop ist. Wir bezeichnen mit $\hat{\varphi}_2 : [0,1] \to \widehat{\mathbb{C}^*}$ die eindeutige Liftung von φ_2 welche $\hat{\varphi}_2(0) = \hat{\varphi}_1(0) = \hat{a}$ erfüllt. Diese ist homotop zu $\hat{\varphi}_1$ (vgl. (9.9)), also gilt $\hat{\varphi}_2(1) = \hat{\varphi}_1(1) = \hat{b}$. Daher ist $\hat{S}_A^{1,\hat{z}}$ zusammmenhängend.
Mit Satz (9.20) aus dem Anhang folgt dann $\tilde{P} : \hat{S}_A^{1,\hat{z}} \to S_A^{1,z}$ ist die universelle Überlagerungfläche von $S_A^{1,z}$ und damit der erste Teil der Behauptung.
Als nächstes zeigen wir, dass $\hat{S}_A^{1,\hat{z}_1} \cap \hat{S}_A^{1,\hat{z}_2}$ kurvenzusammenhängend ist.
Aufgrund von (7.6) folgt die Biholomorphie der Funktion

$$\psi|_{S_A^{1,z}} : S_A^{1,z} \to C_z := \mathbb{C}\backslash[0, z, 1].$$

Es gilt $C_z = M_z \dot{\cup} N_z$ mit

$$M_z := \mathbb{C}\backslash\triangle(0, z, 1) \text{ und } N_z := \triangle(0, z, 1)\backslash[0, z, 1],$$

wobei mit $\triangle(0, z, 1)$ die konvexe Hülle der Menge $\{0, z, 1\}$ gemeint ist.
Mit

$$y \in S_A^{1,z} : \psi(y) \to \infty \Leftrightarrow y \to \infty, \tag{7.19}$$

$\psi^{-1}([0,1]) = \partial K_1(0)$ und $\psi^{-1}\left([0, z, 1]\right) = \mathrm{Spur}\varphi_\pm(z, \cdot)$, falls $\pm \operatorname{Im}(z) \geq 0$ folgt:

$$\left(\psi|_{S_A^{1,z}}\right)^{-1}(M_z) \subset \mathbb{C}\backslash K_1(0), \quad \left(\psi|_{S_A^{1,z}}\right)^{-1}(N_z) \subset \overline{K_1(0)}. \tag{7.20}$$

Ferner gilt

1. $x \in M_z \Rightarrow x + t\left(x - \frac{1}{2}\right) \in C_z$ für alle $t \in [0, \infty[$,

2. $x \in \mathrm{Int}(N_z) \Rightarrow x - t\left(x - \frac{1}{2}\right) \in C_z$ für alle $t \in [0, \infty[$,

3. $x \in N_z \cap]0,1[\Rightarrow x \pm it \in C_z$ für alle $t \in [0, \infty[$ falls $\mp \mathrm{Im}(z) > 0$.

Seien nun $\hat{z}_1, \hat{z}_2 \in \widehat{\Omega}$ und $\hat{y} \in \hat{S}_A^{1,\hat{z}_1} \cap \hat{S}_A^{1,\hat{z}_2}$. Wir wählen hierzu ein $\rho > 1$ mit $\widehat{\mathbb{C}^*} \backslash \overline{\hat{K}_\rho} \subset \hat{S}_A^{1,\hat{z}_1} \cap \hat{S}_A^{1,\hat{z}_2}$ und konstruieren eine Kurve, die in $\hat{S}_A^{1,\hat{z}_1} \cap \hat{S}_A^{1,\hat{z}_2}$ verläuft und $\hat{y}$ mit einem Punkt in $\widehat{\mathbb{C}^*} \backslash \overline{\hat{K}_\rho}$ verbindet.
Aufgrund von (7.20) gilt entweder $\psi(y) \in M_{z_1} \cap M_{z_2}$ oder $\psi(y) \in N_{z_1} \cap N_{z_2}$.
Treten die Fälle $\psi(y) \in M_{z_1} \cap M_{z_2}$ oder $\psi(y) \in (N_{z_1} \cap N_{z_2}) \backslash [0,1]$ auf, so folgt anhand von (a) und (7.19) oder (b) und (7.19), die Existenz einer in $S_A^{1,z_1} \cap S_A^{1,z_2}$ verlaufenden Kurve mit Anfangspunkt y und Endpunkt in $\mathbb{C} \backslash \overline{K_\rho(0)}$.
Wir betrachten nun den Fall $\psi(y) \in (N_{z_1} \cap N_{z_2}) \cap]0,1[$:

1. Falls $\mathrm{Im}(z_1) = 0$ oder $\mathrm{Im}(z_2) = 0$ ist, tritt dieser Fall aufgrund von $N_{z_1} \cap N_{z_2} = \emptyset$ nicht auf.

2. Haben $\mathrm{Im}(z_1)$ und $\mathrm{Im}(z_2)$ verschiedene Vorzeichen, o.E.
$$\mathrm{Im}(z_1) > 0, \quad \mathrm{Im}(z_2) < 0,$$
so tritt dieser Fall ebenfalls nicht auf, denn es gilt
$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(z_1) > 0 \wedge \psi(y) \in N_{z_1} \cap]0,1[&\Rightarrow y \in H_- \cap \partial K_1(0), \\ \mathrm{Im}(z_2) < 0 \wedge \psi(y) \in N_{z_2} \cap]0,1[&\Rightarrow y \in H_+ \cap \partial K_1(0). \end{aligned}$$

3. Falls $\mathrm{Im}(z_1), \mathrm{Im}(z_2) > 0$ oder $\mathrm{Im}(z_1), \mathrm{Im}(z_2) < 0$, so existiert aufgrund von (c) und (7.19) eine in $S_A^{1,z_1} \cap S_A^{1,z_2}$ verlaufende Kurve mit Anfangspunkt y und Endpunkt in $\mathbb{C} \backslash \overline{K_\rho(0)}$.

Seien nun $\hat{y}_1, \hat{y}_2 \in \hat{S}_A^{1,\hat{z}_1} \cap \hat{S}_A^{1,\hat{z}_2}$. Aufgrund des soeben Gezeigten existieren Kurven $\varphi_j : [0,1] \to S_A^{1,z_1} \cap S_A^{1,z_2}$ mit $\varphi_j(0) = y_j$ und $\varphi_j(1) \in \mathbb{C} \backslash K_\rho(0)$ für $j = 1,2$. Betrachtet man dazu die Liftungen $\hat{\varphi}_j : [0,1] \to \widehat{\mathbb{C}^*}$ mit $\tilde{P} \circ \hat{\varphi}_j = \varphi_j$ und $\hat{\varphi}_j(0) = \hat{y}_j$, für $j = 1,2$ dann gilt $\hat{\varphi}_j(1) \in \tilde{P}^{-1}(\mathbb{C} \backslash K_\rho(0)) = \widehat{\mathbb{C}^*} \backslash \overline{\hat{K}_\rho}$, $j = 1,2$. Da nun $\widehat{\mathbb{C}^*} \backslash \overline{\hat{K}_\rho}$ ein Gebiet ist, finden wir insgesamt eine Kurve von $\hat{y}_1$ nach $\hat{y}_2$ in $\hat{S}_A^{1,\hat{z}_1} \cap \hat{S}_A^{1,\hat{z}_2}$. $\square$

Wir führen nun den Beweis von (7.16)2. fort.

Seien $\hat{a}, \hat{b} \in \hat{S}_A$ mit $\hat{a} =: (\hat{a}_1, \hat{a}_2) \in \widehat{\mathbb{C}^*} \times \widehat{\Omega}$ und $\hat{b} =: (\hat{b}_1, \hat{b}_2) \in \widehat{\mathbb{C}^*} \times \widehat{\Omega}$.
Dann existiert eine Kurve $\hat{\nu} : [0,1] \to \widehat{\Omega}$ mit $\hat{\nu}(0) = \hat{a}_2$ und $\hat{\nu}(1) = \hat{b}_2$. Wir wählen hierzu ein $\rho > 1$ mit $\mathrm{Spur}(\hat{\nu}) \in \widehat{\mathcal{E}}(\rho)$ sowie ein $\hat{q} \in \widehat{\mathbb{C}^*} \backslash \overline{\hat{K}_\rho}$.
Aufgrund von Lemma (7.18) findet man eine Kurve $\varphi_a : [0,1] \to \hat{S}_A^{1,\hat{a}_1}$ mit $\varphi_a(0) = \hat{a}_1$ und $\varphi_a(1) = \hat{q}$ und eine Kurve $\varphi_b : [0,1] \to \hat{S}_A^{1,\hat{b}_1}$ mit $\varphi_b(0) = \hat{b}_1$ und $\varphi_b(1) = \hat{q}$. Somit verbindet die Kurve $\phi_a := (\varphi_a, \hat{a}_2)$ die Punkte $(\hat{a}_1, \hat{a}_2)$ und $(\hat{q}, \hat{a}_2)$ in $\hat{S}_A$, die Kurve

$\phi_b := \left(\varphi_b, \hat{b}_2\right)$ die Punkte $(\hat{b}_1, \hat{b}_2)$ und $(\hat{q}, \hat{b}_2)$ in $\hat{S}_A$ und die Kurve $\phi := (\hat{q}, \nu)$ die Punkte $(\hat{q}, \hat{a}_2)$ und $(\hat{q}, \hat{b}_2)$ in $\hat{S}_A$. Daher ist $\hat{S}_A$ zusammenhängend.

Nun ist noch zu zeigen dass $\hat{S}_A$ einfach zusammenhängend ist.
Sei $\hat{\phi} : [0,1] \ni t \to (\hat{\phi}_1(t), \hat{\phi}_2(t)) \in \widehat{\mathbb{C}^*} \times \widehat{\Omega}$ eine beliebige geschlossene Kurve mit Spur $\left(\hat{\phi}\right) \subset \hat{S}_A$. Wir wählen ein $\rho > 1$ mit Spur $\left(\hat{\phi}_2\right) \subset \widehat{\mathcal{E}}(\rho)$ und ein $\hat{q} \in \widehat{\mathbb{C}^*} \backslash \overline{\hat{K}_\rho}$. Aufgrund von $\hat{\phi}_1(t) \in \hat{S}_A^{1,\hat{\phi}_2(t)}$ für $t \in [0,1]$, $\hat{S}_A^{1,\hat{\phi}_2(t)}$ offen und der Stetigkeit von $\hat{\phi}_1$ existiert für jedes $t \in [0,1]$ ein $\delta_t > 0$ mit:

$$\hat{\phi}_1\left(]t-\delta_t, t+\delta_t[\cap[0,1]\right) \subset \hat{S}_A^{1,\hat{\phi}_2(t)}.$$

Für $t \in \mathbb{R}$ sei $I_t :=]t-\delta_t, t+\delta_t[$.
Aufgrund der Kompaktheit von $[0,1]$ und $[0,1] \subset \bigcup_{t\in[0,1]} I_t$ existiert eine endliche Teilmenge M von $[0,1]$ mit $[0,1] \subset \bigcup_{t\in M} I_t$. Seien die $t_\nu \in M$ $(\nu = 1,..,n)$ mit

$$0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_n \leq 1$$

so gewählt, dass sie

$$0 \in I_{t_1},\ 1 \in I_{t_n} \text{ und } I_{t_\nu} \cap I_{t_{\nu+1}} \neq \emptyset \ (\nu = 1, ..., n-1)$$

erfüllen.
Wir definieren dann $\tau_0 = 0$ $\tau_n := 1$. Ferner wählen wir $\tau_\nu \in I_{t_\nu} \cap I_{t_{\nu+1}} \cap]t_\nu, t_{\nu+1}[$, $(\nu = 1, ..., n-1)$ und setzen

$$\hat{q}_j := \hat{\phi}_1(\tau_\nu) \in \hat{S}_A^{1,\hat{\phi}_1(t_\nu)} \cap \hat{S}_A^{1,\hat{\phi}_1(t_{\nu+1})},\ \nu = 1, ..., n-1$$

sowie $\hat{q}_n := \hat{\phi}_1(\tau_0) = \hat{\phi}_1(\tau_1) \in \hat{S}_A^{1,\hat{\phi}_1(t_n)} \cap \hat{S}_A^{1,\hat{\phi}_1(t_1)}$.
Dann existieren wegen Lemma(7.18) Kurven

$$\chi_j : [0,1] \to \hat{S}_A^{1,\hat{\phi}_2(t_j)} \cap \hat{S}_A^{1,\hat{\phi}_2(t_{j+1})} \text{ mit } \chi_j(0) = \hat{q}_j \text{ und } \chi_j(1) = \hat{q},\ j = 1, .., n-1,$$

und

$$\chi_n : [0,1] \to \hat{S}_A^{1,\hat{\phi}_2(t_n)} \cap \hat{S}_A^{1,\hat{\phi}_2(t_1)} \text{ mit } \chi_n(0) = \hat{q}_n \text{ und } \chi_n(1) = \hat{q}.$$

Sei zudem $\chi_0 := \chi_n$. Da nun die Kurve $\hat{\phi}$ homotop zu der Kurve

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(-\chi_j, \hat{\phi}_2(\tau_j)\right) + \hat{\phi}|_{[\tau_j,\tau_{j+1}]} + \left(\chi_{j+1}, \hat{\phi}_2(\tau_{j+1})\right)$$

ist (wobei mit + die übliche Addition zweier Kurven gemeint ist), und für $j = 0, ..., n-1$ die Kurven

$$\left(-\chi_j, \hat{\phi}_2(\tau_j)\right) + \hat{\phi}|_{[\tau_j,\tau_{j+1}]} + \left(\chi_{j+1}, \hat{\phi}_2(\tau_{j+1})\right),\ \left(\hat{q}, \hat{\phi}_2|_{[\tau_j,\tau_{j+1}]}\right)$$

in $\hat{S}_A$ homotop sind (siehe (7.18)), so ist $\hat{\phi}$ in $\hat{S}_A$ homotop zu $\left(\hat{q}, \hat{\phi}_2\right)$.
Aufgrund von (7.15) folgt mit Spur $\left(\left(\hat{q}, \hat{\phi}_2\right)\right) \subset \left(\widehat{\mathbb{C}^*} \backslash \overline{\hat{K}_\rho}\right) \times \widehat{\mathcal{E}}(\rho)$ die Behauptung. $\square$

(7.21) Bemerkung, Definition:
Für $j \in \{1, 2\}$ existiert genau eine stetige partiell holomorphe Liftung

$$\hat{\xi}_j : \hat{S}_I \dot{\cup} \hat{S}_A \to \widehat{\Omega}$$

von $\widetilde{\xi_j} : \hat{S}_I \dot{\cup} \hat{S}_A \ni (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \to \xi_{1/2}(\tilde{P}(\hat{\eta}_1), P(\hat{\eta}_2)) \in \Omega$ *mit*

i) $\hat{\xi}_1(\hat{\gamma}_+, \hat{\omega}_0), \hat{\xi}_1(\hat{\gamma}_-, \hat{\omega}_0) \in \widehat{\Omega}_+ \cap P^{-1}(]1, \infty[)$ *im Fall* $j = 1$,

ii) $\hat{\xi}_2(\hat{\gamma}_+, \hat{\omega}_0), \hat{\xi}_2(\hat{\gamma}_-, \hat{\omega}_0) \in \widehat{\Omega}_0 \cap P^{-1}(]0, 1[)$, *im Fall* $j = 2$.

Beweis: Da es sich bei $\hat{S}_I$ und $\hat{S}_A$ um zusammenhängende, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeiten handelt, sind die Voraussetzungen von Satz (9.13) aus dem Anhang erfüllt. In (7.8) wurde

$$\widetilde{\xi_1}(\hat{\gamma}_\pm, \hat{\omega}_0) \in]1, \infty[\text{ und } \widetilde{\xi_2}(\hat{\gamma}_\pm, \hat{\omega}_0) \in]0, 1[$$

gezeigt. Somit gibt es eindeutige Liftungen

1. $\hat{\xi}_1^I : \hat{S}_I \to \widehat{\Omega}$ von $\widetilde{\xi_1} : \hat{S}_I \to \Omega$ mit $\hat{\xi}_1^I(\hat{\gamma}_-, \hat{\omega}_0) \in \widehat{\Omega}_+ \cap P^{-1}(]1, \infty[)$,
2. $\hat{\xi}_1^A : \hat{S}_A \to \widehat{\Omega}$ von $\widetilde{\xi_1} : \hat{S}_A \to \Omega$ mit $\hat{\xi}_1^1(\hat{\gamma}_+, \hat{\omega}_0) \in \widehat{\Omega}_+ \cap P^{-1}(]1, \infty[)$,
3. $\hat{\xi}_2^I : \hat{S}_I \to \widehat{\Omega}$ von $\widetilde{\xi_2} : \hat{S}_I \to \Omega$ mit $\hat{\xi}_2^I(\hat{\gamma}_-, \hat{\omega}_0) \in \widehat{\Omega}_0 \cap P^{-1}(]0, 1[)$,
4. $\hat{\xi}_2^A : \hat{S}_A \to \widehat{\Omega}$ von $\widetilde{\xi_2} : \hat{S}_A \to \Omega$ mit $\hat{\xi}_2^A(\hat{\gamma}_+, \hat{\omega}_0) \in \widehat{\Omega}_0 \cap P^{-1}(]0, 1[)$.

Da $\hat{S}_I \cap \hat{S}_A = \emptyset$, definieren wir $\hat{\xi}_{1/2} : \hat{S}_I \cup \hat{S}_A \to \widehat{\Omega}$ durch

$$\hat{\xi}_{1/2}(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) := \begin{cases} \hat{\xi}_{1/2}^I(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2), & (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{S}_I \\ \hat{\xi}_{1/2}^A(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2), & (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{S}_A \end{cases}.$$

Die partielle Holomorphie folgt aus (9.14). $\square$

Im folgenden beweisen wir einige grundlegende Eigenschaften von $\hat{\xi}_1$ und $\hat{\xi}_2$.
(7.22) Bemerkung:
Für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \left(\tilde{P}^{-1}(]1, \infty[) \cap \widehat{\mathbb{C}^*}_+\right) \times \left(P^{-1}(]0, 1[) \cap \widehat{\Omega}_0\right)$ *gilt:*

$$\hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \left(P^{-1}(]1, \infty[) \cap \widehat{\Omega}_+\right), \quad \hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \left(P^{-1}(]0, 1[) \cap \widehat{\Omega}_0\right).$$

Für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \left(\tilde{P}^{-1}\left(]0,1[\right) \cap \widehat{\mathbb{C}^*}_+\right) \times \left(P^{-1}\left(]0,1[\right) \cap \widehat{\Omega}_0\right)$ *gilt:*

$$\hat{\xi}_1\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right) \in \left(P^{-1}\left(]1,\infty[\right) \cap \widehat{\Omega}_+\right), \quad \hat{\xi}_2\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right) \in \left(P^{-1}\left(]0,1[\right) \cap \widehat{\Omega}_0\right).$$

Beweis:
In (7.8)3. haben wir

$$\begin{array}{rr} \xi_1(]1,\infty[\times]0,1[) \subset]1,\infty[, & \xi_2(]1,\infty[\times]0,1[) \subset]0,1[\\ \xi_1(]0,1[\times]0,1[) \subset]1,\infty[, & \xi_2(]0,1[\times]0,1[) \subset]0,1[\end{array}$$

gezeigt.
Sei $M_1 := \left(\tilde{P}^{-1}\left(]1,\infty[\right) \cap \widehat{\mathbb{C}^*}_+\right) \times \left(P^{-1}\left(]0,1[\right) \cap \widehat{\Omega}_0\right)$.
Damit folgt aus der Stetigkeit der Funktionen $\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2$:
$\hat{\xi}_1(M_1)$ liegt in einer Zusammenhangskomponente von $P^{-1}\left(]1,\infty[\right)$ und $\hat{\xi}_2(M_1)$ liegt in einer Zusammenhangskomponente von $P^{-1}\left(]0,1[\right)$.
Aufgrund von $(\hat{\gamma}_+, \hat{\omega}_0) \in M_1$ folgt mit (7.21) der erste Teil der Behauptung.
Der zweite Teil folgt auf analoge Weise. □

Wir beweisen nun unter Verwendung von (7.8)1. Funktionalgleichungen für die Funktionen $\hat{\xi}_1$ und $\hat{\xi}_2$.

(7.23) Satz (Funktionalgleichungen):
Für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{S}_A$ *gilt:*

i) $\hat{T} \circ \hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = d_1 \circ \hat{\xi}_1\left(\delta_{-\pi}\left(\hat{\eta}_1\right), \hat{T}(\hat{\eta}_2)\right)$,

ii) $\hat{T} \circ \hat{\xi}_2\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right) = \hat{\xi}_2\left(\delta_{-\pi}\left(\hat{\eta}_1\right), \hat{T}\left(\hat{\eta}_2\right)\right)$.

Für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{S}_I$ *gilt:*

iii) $\hat{T} \circ \hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = \hat{\xi}_2\left(\delta_{-\pi}\left(\hat{\eta}_1\right), \hat{T}\left(\hat{\eta}_2\right)\right)$,

iv) $\hat{T} \circ \hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = d_1 \circ \hat{\xi}_1\left(\delta_{-\pi}\left(\hat{\eta}_1\right), \hat{T}\left(\hat{\eta}_2\right)\right)$.

Beweis:
Zu i, ii): Da die Funktionalgleichung (7.9) auf D_A gilt, so gilt sie auch nach dem verallgemeinerten Identitätsatz (siehe [4]) auf S_A, und somit folgt für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{S}_A$:

$$\begin{aligned} P \circ \hat{T} \circ \hat{\xi}_{1/2}(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) &= T \circ P \circ \hat{\xi}_{1/2}(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = 1 - \widetilde{\xi}_{1/2}(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = 1 - \xi_{1/2}(\eta_1, \eta_2) \\ &= \xi_{1/2}\left(-\eta_1, T(\eta_2)\right) = P \circ \hat{\xi}_{1/2}\left(\delta_{-\pi}\left(\hat{\eta}_1\right), \hat{T}(\hat{\eta}_2)\right). \end{aligned}$$

Nach Satz (9.13) aus dem Anhang reicht es aus, die zu zeigenden Gleichungen jeweils nur an einem Punkt in $\hat{S}_A$ zu überprüfen.
Sei $\rho > 1$. Dann gilt $\left(\mathbb{C}\backslash\overline{K_\rho(0)}, \frac{1}{2}\right) \subset S_A$, und mit (7.8)2)a) existiert ein $K > 0$ mit

$$\left|\xi_1\left(\eta_1, \frac{1}{2}\right) - \eta_1\right| < K \text{ und } \left|\xi_2\left(\eta_1, \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right| < K|\eta_1|^{-1},\ \eta_1 \in \mathbb{C}\backslash\overline{K_\rho(0)}.$$

Wir wählen $r > \max\{2K+1, \rho\} > 1$.
Dann gilt mit $\varphi : [0,1] \ni t \to r\exp(-\pi i t)$ für $t \in [0,1]$:

$$\left|\xi_1\left(\varphi(t), \frac{1}{2}\right) - \varphi(t)\right| < K \wedge \left|\xi_2\left(\varphi(t), \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right| < \frac{K}{2K+1} < \frac{1}{2}. \tag{7.24}$$

Somit folgt

$$\xi_1\left(\varphi(\cdot), \frac{1}{2}\right) : [0,1] \to \Omega_\infty \text{ und } \xi_2\left(\varphi(\cdot), \frac{1}{2}\right) : [0,1] \to \Omega_0. \tag{7.25}$$

Sei nun $\hat{r} \in \widehat{\mathbb{C}^*}_+ \cap \tilde{P}^{-1}\left(]1,\infty[\right)$ mit $\tilde{P}(\hat{r}) = r$. Aufgrund von (7.22) folgt

$$\hat{\xi}_1(\hat{r}, \hat{\omega}_0) \in \widehat{\Omega}_+ \cap P^{-1}(]1,\infty[) \text{ und } \hat{\xi}_2(\hat{r}, \hat{\omega}_0) \in \widehat{\Omega}_0 \cap P^{-1}(]0,1[). \tag{7.26}$$

Sei $\hat{\varphi} : [0,1] \to \widehat{\mathbb{C}^*}$ die eindeutige Liftung von φ mit $\hat{\varphi}(0) = \hat{r}$. Dann ist $\delta_{-\pi}(\hat{r}) = \hat{\varphi}(1)$ und wegen (7.24) und (7.25) folgt dann:

$$\begin{aligned}\hat{\xi}_1\left(\delta_{-\pi}(\hat{r}), \hat{T}(\hat{\omega}_0)\right) &= \hat{\xi}_1\left(\delta_{-\pi}(\hat{r}), \hat{\omega}_0\right) = \hat{\xi}_1\left(\hat{\varphi}(1), \hat{\omega}_0\right) \in d_1^{-1}\left(\widehat{\Omega}_-\right), \\ \hat{\xi}_2\left(\delta_{-\pi}(\hat{r}), \hat{T}(\hat{\omega}_0)\right) &= \hat{\xi}_2\left(\delta_{-\pi}(\hat{r}), \hat{\omega}_0\right) = \hat{\xi}_2\left(\hat{\varphi}(1), \hat{\omega}_0\right) \in \widehat{\Omega}_0.\end{aligned}$$

Andererseits gilt mit (7.26) und (2.18):

$$\hat{T} \circ \hat{\xi}_1(\hat{r}, \hat{\omega}_0) \in \widehat{\Omega}_-, \quad \hat{T} \circ \hat{\xi}_2(\hat{r}, \hat{\omega}_0) \in \widehat{\Omega}_0.$$

Damit folgt die Behauptung.
Zu iii), iv): Da die Funktionalgleichung (7.10) auf D_I gilt, so gilt sie auch auf S_I nach dem verallgemeinerten Identitätsatz. Daher gilt für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{S}_I$:

$$\begin{aligned}P \circ \hat{T} \circ \hat{\xi}_{1/2}(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) &= T \circ P \circ \hat{\xi}_{1/2}(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = 1 - \widetilde{\xi}_{2/1}(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = 1 - \xi_{2/1}(\eta_1, \eta_2) \\ &= \xi_{2/1}\left(-\eta_1, T(\eta_2)\right) = P \circ \hat{\xi}_{2/1}\left(\delta_{-\pi}(\hat{\eta}_1), \hat{T}(\hat{\eta}_2)\right).\end{aligned}$$

Es reicht also nach (9.13) aus, die Funktionalgleichungen jeweils nur in einem Punkt zu überprüfen.
Sei $\rho < 1$. Dann ist $(K_\rho(0), \frac{1}{2}) \subset S_I$ und mit (7.8)2)b) existiert ein $K > 0$ mit

$$\left|\xi_1\left(\eta_1, \frac{1}{2}\right) - \left(1 + \frac{\eta_1}{2}\right)\right| < K|\eta_1|^2, \quad \left|\xi_2\left(\eta_1, \frac{1}{2}\right) - \frac{\eta_1}{2}\right| < K|\eta_1|^2$$

für alle $\eta_1 \in K_\rho(0)$.
Sei $\varepsilon := \min\{\frac{1}{4K}, \rho\}$. Dann gilt $K\varepsilon^2 \le \frac{\varepsilon}{4}$ und mit $\varphi : [0,1] \ni t \to \varepsilon \exp(-i\pi t)$ folgt für $t \in [0,1]$:

$$\left|\xi_1\left(\varphi(t), \frac{1}{2}\right) - \left(1 + \frac{\varphi(t)}{2}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \left|\xi_2\left(\varphi(t), \frac{1}{2}\right) - \frac{\varphi(t)}{2}\right| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{7.27}$$

Sei nun $\hat{\varepsilon} \in \widehat{\mathbb{C}^*}_+ \cap \tilde{P}^{-1}(]0,1[)$ mit $P(\hat{\varepsilon}) = \varepsilon$. Aufgrund von (7.22) folgt

$$\hat{\xi}_1(\hat{\varepsilon}, \hat{\omega}_0) \in \widehat{\Omega}_+ \cap P^{-1}(]1,\infty[), \quad \hat{\xi}_2(\hat{\varepsilon}, \hat{\omega}_0) \in P^{-1}(]0,1[) \cap \widehat{\Omega}_0. \tag{7.28}$$

Mit $\hat{\varphi} : [0,1] \to \widehat{\mathbb{C}^*}$ bezeichnen wir die eindeutige Liftung von φ welche $\hat{\varphi}(0) = \hat{\varepsilon}$ erfüllt. Dann ist $\delta_{-\pi}(\hat{\varepsilon}) = \hat{\varphi}(1)$ und über (7.27) folgt:

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_1\left(\delta_{-\pi}(\hat{\varepsilon}), \hat{T}(\hat{\omega}_0)\right) &= \hat{\xi}_1(\hat{\varphi}(1), \hat{\omega}_0) \in d_1^{-1}\left(\widehat{\Omega}_0\right), \\ \hat{\xi}_2\left(\delta_{-\pi}(\hat{\varepsilon}), \hat{T}(\hat{\omega}_0)\right) &= \hat{\xi}_2(\hat{\varphi}(1), \hat{\omega}_0) \in \widehat{\Omega}_-. \end{aligned}$$

Andererseits gilt wegen (7.28) und (2.18):

$$\hat{T} \circ \hat{\xi}_1(\hat{\varepsilon}, \hat{\omega}_0) \in \widehat{\Omega}_-, \quad \hat{T} \circ \hat{\xi}_2(\hat{\varepsilon}, \hat{\omega}_0) \in \widehat{\Omega}_0.$$

Somit folgt die Behauptung. $\square$

Als nächstes untersuchen wir das Umlaufverhalten von $\hat{\xi}_1$ und $\hat{\xi}_2$.
(7.29) Satz (Umlaufverhalten):
Für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{S}_A$ gilt:

i) $\hat{\xi}_1(\delta_{2\pi}(\hat{\eta}_1), \hat{\eta}_2) = d_\infty \circ \hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2), \quad \hat{\xi}_2(\delta_{2\pi}(\hat{\eta}_1), \hat{\eta}_2) = \hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2),$

ii) $\hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, d_{0/1}(\hat{\eta}_2)) = \hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2), \quad \hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, d_{0/1}(\hat{\eta}_2)) = d_{0/1} \circ \hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2).$

Für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{S}_I$ gilt:

iii) $\hat{\xi}_1(\delta_{2\pi}(\hat{\eta}_1), \hat{\eta}_2) = d_1 \circ \hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2), \quad \hat{\xi}_2(\delta_{2\pi}(\hat{\eta}_1), \hat{\eta}_2) = d_0 \circ \hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2),$

iv) $\hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, d_0(\hat{\eta}_2)) = \hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2), \quad \hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, d_0(\hat{\eta}_2)) = d_0 \circ \hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2),$

v) $\hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, d_1(\hat{\eta}_2)) = d_1 \circ \hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2), \quad \hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, d_1(\hat{\eta}_2)) = \hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2).$

Beweis:
Zu i): Für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{S}_A$ gilt aufgrund von (7.23)i) und $\hat{T} \circ d_1 = d_0 \circ \hat{T}$:

$$\hat{\xi}_1(\delta_{2\pi}(\hat{\eta}_1), \hat{\eta}_2) = d_0 \circ \hat{T} \circ \hat{\xi}_1\left(\delta_\pi(\hat{\eta}_1), \hat{T}(\hat{\eta}_2)\right).$$

Ferner folgt aus (7.23)i): $\hat{T} \circ \hat{\xi}_1\left(\delta_\pi(\hat{\eta}_1), \hat{T}(\hat{\eta}_2)\right) = d_1 \circ \hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)$ und damit $\hat{\xi}_1(\delta_{2\pi}(\hat{\eta}_1), \hat{\eta}_2) = d_0 \circ d_1 \circ \hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = d_\infty \circ \hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)$.

Auf analoge Weise lässt sich mit (7.23)ii) die zweite Behauptung zeigen.
Zu ii): Für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{S}_A$ gilt:

$$\begin{aligned} P \circ \hat{\xi}_1 (\hat{\eta}_1, d_0 (\hat{\eta}_2)) &= \widetilde{\xi}_1 (\hat{\eta}_1, d_0 (\hat{\eta}_2)) = \xi_1(\eta_1, \eta_2) = P \circ \hat{\xi}_1 (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2), \\ P \circ \hat{\xi}_2 (\hat{\eta}_1, d_0 (\hat{\eta}_2)) &= \widetilde{\xi}_2 (\hat{\eta}_1, d_0 (\hat{\eta}_2)) = \xi_1(\eta_1, \eta_2) = P \circ d_0 \circ \hat{\xi}_2 (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2). \end{aligned}$$

Daher genügt es nach Satz (9.13) aus dem Anhang, die zu zeigenden Gleichungen jeweils nur an einem Punkt in $\hat{S}_A$ zu überprüfen.
Wir betrachten die Kurve $\varphi_0 : [0,1] \to \frac{1}{2} \exp(2\pi i t) \in \Omega$, und deren eindeutige Liftung $\hat{\varphi}_0 : [0,1] \to \widehat{\Omega}$ mit $\hat{\varphi}(0) = \hat{\omega}_0$. Wie schon in (2.19) gezeigt, gilt $\hat{\varphi}_0(1) = d_0(\hat{\omega}_0)$.
Sei nun $\rho > 1$ mit $\mathrm{Spur}(\varphi_0) \in \mathcal{E}(\rho)$. Aufgrund von (7.8)2)a) lässt sich nun ein $r > \rho$ so wählen, dass für $t \in [0,1]$ gilt:

$$|\xi_1(r, \varphi_0(t)) - r| < \frac{r-1}{2} \wedge |\xi_2(r, \varphi_0(t)) - \varphi_0(t)| < \frac{1}{4}. \tag{7.30}$$

Sei $\hat{r} \in \widehat{\mathbb{C}^*}_+ \cap \tilde{P}^{-1}(]\rho, \infty[)$ mit $\tilde{P}(\hat{r}) = r$, so gilt wegen (7.22)

$$\hat{\xi}_1 (\hat{r}, \hat{\omega}_0) \in \widehat{\Omega}_+ \cap P^{-1}(]1, \infty[), \quad \hat{\xi}_2 (\hat{r}, \hat{\omega}_0) \in \widehat{\Omega}_0 \cap P^{-1}(]0, 1[) \tag{7.31}$$

und mit (7.30)

$$\hat{\xi}_1 (\hat{r}, d_0 (\hat{\omega}_0)) \in \widehat{\Omega}_+, \quad \hat{\xi}_2 (\hat{r}, d_0(\hat{\omega}_0)) \in d_0 \left(\widehat{\Omega}_0\right).$$

Mit (7.31) folgt dann $\hat{\xi}_1 (\hat{r}, d_0 (\hat{\omega}_0)) = \hat{\xi}_1 (\hat{r}, \hat{\omega}_0)$, $\hat{\xi}_2 (\hat{r}, d_0 (\hat{\omega}_0)) = d_0 \circ \hat{\xi}_2 (\hat{r}, \hat{\omega}_0)$ und damit die Behauptung.
Aufgrund des oben Gezeigten, (7.23)i) und $d_0 \circ \hat{T} = \hat{T} \circ d_1$ erhält man für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{S}_A$:

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_1 (\hat{\eta}_1, d_1 (\hat{\eta}_2)) &= \hat{T} \circ d_1 \circ \hat{\xi}_1 \left(\delta_{-\pi} (\hat{\eta}_1), \hat{T} \circ d_1 (\hat{\eta}_2)\right) \\ &= \hat{T} \circ d_1 \circ \hat{\xi}_1 \left(\delta_{-\pi} (\hat{\eta}_1), d_0 \circ \hat{T} (\hat{\eta}_2)\right) \\ &= \hat{T} \circ d_1 \circ \hat{\xi}_1 \left(\delta_{-\pi} (\hat{\eta}_1), \hat{T} (\hat{\eta}_2)\right) = \hat{\xi}_1 (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2), \\ \hat{\xi}_2 (\hat{\eta}_1, d_1 (\hat{\eta}_2)) &= \hat{T} \circ \hat{\xi}_2 \left(\delta_{-\pi} (\hat{\eta}_1), \hat{T} \circ d_1 (\hat{\eta}_2)\right) = \hat{T} \circ \hat{\xi}_2 \left(\delta_{-\pi} (\hat{\eta}_1), d_0 \circ \hat{T} (\hat{\eta}_2)\right) \\ &= \hat{T} \circ d_0 \circ \hat{\xi}_2 \left(\delta_{-\pi} (\hat{\eta}_1), \hat{T} (\hat{\eta}_2)\right) = d_1 \circ \hat{T} \circ \hat{\xi}_2 \left(\delta_{-\pi} (\hat{\eta}_1), \hat{T} (\hat{\eta}_2)\right) \\ &= d_1 \circ \hat{\xi}_2 (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2). \end{aligned}$$

Zu iii): Für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{S}_I$ gilt aufgrund von (7.23)iii):

$$\hat{\xi}_1(\delta_{2\pi} (\hat{\eta}_1), \hat{\eta}_2) = \hat{T} \circ \hat{\xi}_2 \left(\delta_\pi (\hat{\eta}_1), \hat{T}(\hat{\eta}_2)\right)$$

und wegen (7.23)iv): $\hat{T} \circ \hat{\xi}_2 \left(\delta_\pi (\hat{\eta}_1), \hat{T} (\hat{\eta}_2)\right) = d_1 \circ \hat{\xi}_1 (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)$ damit $\hat{\xi}_1(\delta_{2\pi} (\hat{\eta}_1), \hat{\eta}_2) = d_1 \circ \hat{\xi}_1 (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)$.

Analog lässt sich $\hat{\xi}_2(\delta_{2\pi}(\hat{\eta}_1), \hat{\eta}_2) = d_0 \circ \hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)$ zeigen, und damit die Behauptung.
Zu iv), v): Wir betrachten wieder die Kurve $\varphi_0 : [0,1] \to \frac{1}{2}\exp(2\pi i t) \in \Omega$, und wählen ein $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, so dass aufgrund von (7.8)2)b) für $t \in [0,1]$ gilt:

$$|\xi_2(\varepsilon, \varphi_0(t)) - \varepsilon\varphi_0(t)| < \frac{\varepsilon|\varphi_0(t)|}{2} = \frac{\varepsilon}{4} < \frac{|1 - \varepsilon\varphi_0(t)|}{2} \tag{7.32}$$

$$|\xi_2(\varepsilon, T \circ \varphi_0(t)) - \varepsilon T \circ \varphi_0(t)| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{7.33}$$

Dann folgt für $t \in [0,1]$:

$$|\xi_2(\varepsilon, T \circ \varphi_0(t)) - \varepsilon| < \frac{\varepsilon}{4} + \varepsilon|\varphi_0(t)| = \frac{3}{4}\varepsilon. \tag{7.34}$$

Sei $\hat{\varphi} : [0,1] \to \widehat{\Omega}$ die Liftung von $\varepsilon\varphi_0(\cdot)$ sowie $\hat{\varphi}_0 : [0,1] \to \widehat{\Omega}$ die Liftung von φ_0, mit

$$\hat{\varphi}(0) \in \widehat{\Omega}_0 \cap P^{-1}(]0,1[), \hat{\varphi}_0(0) = \hat{\omega}_0.$$

Wegen (2.19) gilt $\hat{\varphi}_0(1) = d_0(\hat{\varphi}_0(0))$, und mit der Stetigkeit von d_0 folgt $\hat{\varphi}(1) = d_0(\hat{\varphi}(0))$.
Sei $\hat{\varepsilon} \in \widehat{\mathbb{C}^*}_+ \cap P^{-1}(]0,1[)$ mit $\tilde{P}(\hat{\varepsilon}) = \varepsilon$. Aufgrund von (7.22) gilt

$$\hat{\xi}_2(\hat{\varepsilon}, \hat{\varphi}_0(0)) = \hat{\xi}_2\left(\hat{\varepsilon}, \hat{T} \circ \hat{\varphi}_0(0)\right) = \hat{\xi}_2(\hat{\varepsilon}, \hat{\omega}_0) \in \widehat{\Omega}_0 \cap P^{-1}(]0,1[).$$

Mit (7.32) folgt dann

$$\hat{\xi}_2(\hat{\varepsilon}, d_0 \circ \hat{\varphi}_0(0)) = \hat{\xi}_2(\hat{\varepsilon}, \hat{\varphi}_0(1)) \in d_0\left(\widehat{\Omega}_0\right),$$

und mit (7.34) sowie $\hat{T} \circ \hat{\varphi}_0(1) = \hat{T} \circ d_0 \circ \hat{\varphi}_0(0) = d_1 \circ \hat{T} \circ \hat{\varphi}_0(0)$ folgt

$$\hat{\xi}_2\left(\hat{\varepsilon}, d_1 \circ \hat{T} \circ \hat{\varphi}_0(0)\right) = \hat{\xi}_2\left(\hat{\varepsilon}, \hat{T} \circ \hat{\varphi}_0(1)\right) \in \widehat{\Omega}_0.$$

Damit gilt für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{S}_I$:

$$\hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, d_0(\hat{\eta}_2)) = d_0 \circ \hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2), \quad \hat{\xi}_2(\hat{\varepsilon}, d_1(\hat{\eta}_2)) = \hat{\xi}_2(\hat{\varepsilon}, \hat{\eta}_2).$$

Aufgrund des oben Gezeigten, (7.23)iii) und iv) und $d_0 \circ \hat{T} = \hat{T} \circ d_1$ folgt für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{S}_I$:

$$\begin{aligned}
\hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, d_1(\hat{\eta}_2)) &= \hat{T} \circ \hat{\xi}_2\left(\delta_{-\pi}(\hat{\eta}_1), \hat{T} \circ d_1(\hat{\eta}_2)\right) = \hat{T} \circ \hat{\xi}_2\left(\delta_{-\pi}(\hat{\eta}_1), d_0 \circ \hat{T}(\hat{\eta}_2)\right) \\
&= \hat{T} \circ d_0 \circ \hat{\xi}_2\left(\delta_{-\pi}(\hat{\eta}_1), \hat{T}(\hat{\eta}_2)\right) = d_1 \circ \hat{T} \circ \hat{\xi}_2\left(\delta_{-\pi}(\hat{\eta}_1), \hat{T}(\hat{\eta}_2)\right) \\
&= d_1 \circ \hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2), \\
\hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, d_0(\hat{\eta}_2)) &= \hat{T} \circ \hat{\xi}_2\left(\delta_{-\pi}(\hat{\eta}_1), \hat{T} \circ d_0(\hat{\eta}_2)\right) \\
&= \hat{T} \circ \hat{\xi}_2\left(\delta_{-\pi}(\hat{\eta}_1), d_1 \circ \hat{T}(\hat{\eta}_2)\right) \\
&= \hat{T} \circ \hat{\xi}_2\left(\delta_{-\pi}(\hat{\eta}_1), \hat{T}(\hat{\eta}_2)\right) = \hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2).
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. $\square$

Für die Entwicklungsätze und Grenzwertbetrachtungen, die im nächsten Kapitel besprochen werden, beweisen wir noch einige analytische Eigenschaften der Funktionen $\hat{\xi}_1$ und $\hat{\xi}_2$ in $\hat{S}_A$.

(7.35) Bemerkung, Definition:

i) *Sei* $I_1 : \widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_1} \to \widehat{\Omega}_\infty^+ \cap P^{-1}\left(\mathbb{C}\backslash\overline{K_1(1)}\right)$ *die holomorphe Liftung von* $\tilde{I}_1 : \widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_1} \ni \hat{\eta}_1 \to \eta_1 + 1 \in \mathbb{C}\backslash\overline{K_1(1)} \subset \Omega_\infty$ *mit* $I_1(\hat{\gamma}_+) \in P^{-1}(3) \cap \widehat{\Omega}_+$. *Dann gilt:*

$$\hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \to I_1(\hat{\eta}_1), \quad (\eta_2 \to 0), \text{ für } (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{S}_A \cap \left(\widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_1} \times \widehat{\Omega}\right),$$

lokal gleichmäßig bezüglich $\hat{\eta}_1$.

ii) *Sei* $I_0 : \widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_1} \to \widehat{\Omega}_\infty^+ \cap P^{-1}\left(\mathbb{C}\backslash\overline{K_1(0)}\right)$ *die holomorphe Liftung von* $\tilde{I}_0 : \widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_1} \ni \hat{\eta}_1 \to \eta_1 \in \mathbb{C}\backslash\overline{K_1(0)} \subset \Omega_\infty$ *mit* $I_0(\hat{\gamma}_+) \in P^{-1}(2) \cap \widehat{\Omega}_+$. *Dann gilt:*

$$\hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \to I_0(\hat{\eta}_1), \quad (\eta_2 \to 1), \text{ für } (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{S}_A \cap \left(\widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_1} \times \widehat{\Omega}\right),$$

lokal gleichmäßig bezüglich $\hat{\eta}_1$.

iii) *Es gilt*

$$\hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \to \hat{\eta}_2, \quad (\eta_1 \to \infty), \ (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{S}_A$$

lokal gleichmäßig bezüglich $\hat{\eta}_2$.

Beweis:
Zu i): Wir bezeichnen mit Z_0 die Zusammenhangskomponente von $P^{-1}(K_1(0)\backslash\{0\})$, welche $\hat{\omega}_0 \in Z_0$ erfüllt, und sei $K \subset \widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_1}$ eine nicht leere, zusammenhängende kompakte Menge. Dann existiert ein $\rho > 1$ mit $K \subset \widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_\rho}$.
In (7.8) haben wir:

$$P \circ \hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = \xi_1(\eta_1, \eta_2) \to \eta_1 + 1, (\eta_2 \to 0) \text{ gleichmäßig,}$$

für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in K \times \widehat{\mathcal{E}}(\rho)$ gezeigt.
Da $\eta_1 + 1 \in \mathbb{C}\backslash\overline{K_\rho(1)}$ für $\hat{\eta}_1 \in K$, so gilt

$$\begin{aligned}\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta \in]0,1[: (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in K \times P^{-1}(K_\delta(0)\backslash\{0\}) \cap Z_0 \\ \Rightarrow \xi_1(\eta_1, \eta_2) \in K_\varepsilon(\eta_1 + 1) \cap \mathbb{C}\backslash\overline{K_\rho(1)}.\end{aligned}$$

Zudem ist $M_\delta := P^{-1}(K_\delta(0)\backslash\{0\}) \cap Z_0$, $\delta \in]0,1[$ zusammenhängend, denn:
Zu $\hat{z}_1, \hat{z}_2 \in M$ existiert eine Kurve $\hat{\varphi}_1 : [0,1] \to Z_0$ mit $\hat{\varphi}_1(0) = \hat{z}_1$ und $\hat{\varphi}_1(0) = \hat{z}_2$.

Dann wähle man sich eine Kurve $\varphi_2 : [0,1] \to K_\delta(0)\backslash\{0\}$, die homotop zu $P \circ \hat{\varphi}_1$ ist. Mit dem Satz (9.9) aus dem Anhang folgt dann, dass eine Liftung $\hat{\varphi}_2$ von φ_2 existiert mit $\hat{\varphi}_2(0) = \hat{\varphi}_2(0)$ und $\hat{\varphi}_2$ ist homotop zu $\hat{\varphi}_1$.
Damit folgt aus der Stetigkeit von $\hat{\xi}_1$:

$$\forall \hat{\eta}_1 \in K\ \exists I_1(\hat{\eta}_1) \in P^{-1}(\eta_1 + 1) \text{ mit } \hat{\xi}_1 (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \to I_1(\hat{\eta}_1), \text{ für } \hat{\eta}_2 \in Z_0,\ \eta_2 \to 0,$$

gleichmäßig bezüglich $\hat{\eta}_1 \in K$. Aufgrund des in (7.29) beschriebenen Umlaufverhaltens von $\hat{\xi}_1$ bezüglich $\hat{\eta}_2$ folgt dann

$$\forall \hat{\eta}_1 \in K \exists I_1(\hat{\eta}_1) \in P^{-1}(\eta_1 + 1) \text{ mit } \hat{\xi}_1 (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \to I_1(\hat{\eta}_1),\ \eta_2 \to 0.$$

gleichmäßig bezüglich $\hat{\eta}_1 \in K$.
Damit ist $I_1 : \widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_1} \to P^{-1}(\eta_1 + 1)$ wohldefiniert und holomorph.
Aufgrund von (7.22) gilt $\hat{\xi}_1 \left(\hat{\gamma}_+, P^{-1}\left(]0,1[\right) \cap \widehat{\Omega}_0\right) \subset P^{-1}\left(]1,\infty[\right) \cap \widehat{\Omega}_+ \subset \widehat{\Omega}_\infty^+$. Damit folgt $I_1\left(\hat{\gamma}_+\right) \in P^{-1}(3) \cap \widehat{\Omega}_+ \subset \widehat{\Omega}_\infty^+$ und damit $I_1\left(\widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_1}\right) \subset \widehat{\Omega}_\infty^+$.
Da wir in (7.15) gezeigt haben, dass $\widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_1}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist, existiert aufgrund von (9.13) aus dem Anhang genau eine Lifung von $\tilde{I}_1$, welche in $\hat{\gamma}_+$ den Wert $I_1\left(\hat{\gamma}_+\right)$ annimmt. Damit ist I_1 diese Liftung.
Zu ii): Der Beweis geht analog zu dem gerade Gezeigten.
Zu iii): Sei $K \subset \widehat{\Omega}$ kompakt. Dann existiert ein $\rho > 1$ mit $K \subset \widehat{\mathcal{E}}(\rho)$. Mit (7.8) gilt

$$P \circ \hat{\xi}_2\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right) = \xi_2\left(\eta_1, \eta_2\right) \to \eta_2, (\eta_1 \to \infty), \quad \hat{\eta}_1 \in \widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_\rho}$$

lokal gleichmäßig für $\hat{\eta}_2 \in \widehat{\mathcal{E}}(\rho)$.
Wegen (7.22) gilt $\hat{\xi}_2\left(\tilde{P}^{-1}\left(]1,\infty[\right) \cap \widehat{\mathbb{C}^*}_+, P^{-1}\left(]0,1[\right) \cap \widehat{\Omega}_0\right) \subset P^{-1}\left(]0,1[\right) \cap \widehat{\Omega}_0$. Analog zu i) folgt die Behauptung. $\square$

Wir haben in der vorangegangenen Bemerkung das Verhalten von $\hat{\xi}_1$ für $\eta_2 \to 0$ bzw. $\eta_2 \to 1$ sowie das Verhalten von $\hat{\xi}_2$ für $\eta_1 \to \infty$ untersucht. Es bleibt also noch das Verhalten von $\hat{\xi}_1$ für grosse η_1 sowie das Verhalten von $\hat{\xi}_2$ für η_2 nahe bei 0 bzw. 1 zu untersuchen.

(7.36) Bemerkung, Definition:

i) Zu jedem $\emptyset \neq K \subset \widehat{\Omega}$ kompakt existiert ein $\rho > 1$ mit

$$\hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \widehat{\Omega}_\infty^+ \text{ für } (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \left(\widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_\rho}\right) \times K.$$

ii) Sei Z_0 die Zusammenhangskomponente von $P^{-1}\left(K_1(0)\backslash\{0\}\right)$ mit $\hat{\omega}_0 \in Z_0$. Dann existiert zu jedem $\emptyset \neq K \subset \widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_1}$ kompakt ein $\delta \in]0,1[$ mit

$$\hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in Z_0 \text{ für } (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in K \times \left(P^{-1}\left(K_\delta(0)\backslash\{0\}\right) \cap Z_0\right).$$

iii) Es gilt $\arg_0\left(\hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2)\right) - \arg(\hat{\eta}_1) \to 0$, *(*$\eta_1 \to \infty$*), für* $(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) \in \hat{S}_A$*, lokal gleichmäßig bezüglich* $\hat{\eta}_2$.

iv) $\ln_0\left(\hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2)\right) + \ln_0\left(\hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2)\right) = \ln(\hat{\eta}_1) + \ln_0(\hat{\eta}_2), \quad (\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) \in \hat{S}_A$

Beweis:
Zu i): Sei $\emptyset \neq K \subset \widehat{\Omega}$ eine zusammenhängende kompakte Menge und $\hat{\eta}_2 \in K$. Wir wählen eine Kurve $\varphi : [0,1] \to \widehat{\Omega}$ mit $\varphi(0) = \hat{\omega}_0$ und $\varphi(1) = \hat{\eta}_2$ und ein $\varrho > 1$ mit $\tilde{K} := \operatorname{Spur}(\varphi) \cup K \subset \widehat{\mathcal{E}}(\varrho)$. Dann gilt $\widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}(\varrho)} \times \tilde{K} \subset \hat{S}_A$, und mit dem in (7.8)2)a) errechneten asymptotischen Verhalten folgt

$$P \circ \hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) = \eta_1\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\eta_1}\right)\right), \ \hat{\eta}_1 \in \widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_\varrho}, \eta_1 \to \infty, \tag{7.37}$$

gleichmäßig bezüglich $\hat{\eta}_2 \in \tilde{K}$. Damit existiert ein $\rho > \varrho > 1$

$$\hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) \in P^{-1}(\Omega_\infty) \ \text{ für } \ (\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) \in \left(\widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_\rho}\right) \times \tilde{K}.$$

Da $\widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_\rho}$ zusammenhängend ist, folgt aus der Stetigkeit von $\hat{\xi}_1$:
Es existiert eine Zusammenhangskomponente Z von $P^{-1}(\Omega_\infty)$ mit

$$\hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) \in Z \text{ für } (\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) \in \left(\widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_\rho}\right) \times \tilde{K}.$$

Ferner folgt aus (7.22):

$$\hat{\xi}_1(\hat{r},\hat{\omega}_0) \in \widehat{\Omega}_+ \cap P^{-1}(]1,\infty[) \subset \widehat{\Omega}^+_\infty \text{ für } \hat{r} \in \tilde{P}^{-1}(]1,\infty[) \cap \widehat{\mathbb{C}^*}_+. \tag{7.38}$$

Somit ist $Z = \widehat{\Omega}^+_\infty$, und damit gilt die Behauptung.
Zu ii): Sei $\emptyset \neq K \subset \widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_1}$ eine zusammenhängende kompakte Menge und
$\varphi : [0,1] \to \widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_1}$ eine Kurve mit $\varphi(0) = \hat{\gamma}_+$ und $\varphi(1) \in K$.
Wir wählen ein $\varrho > 1$ mit $\tilde{K} := \operatorname{Spur}(\varphi) \cup K \subset \widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}(\varrho)}$.
Dann gilt $\tilde{K} \times \widehat{\mathcal{E}}(\varrho) \subset \hat{S}_A$ und mit dem in (7.8)2) errechneten asymptotischen Verhalten folgt

$$P \circ \hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) = \xi_2(\eta_1,\eta_2) = \mathcal{O}(\eta_2), \ \hat{\eta}_2 \in Z_0, (\eta_2 \to 0),$$

gleichmäßig bezüglich $\hat{\eta}_1 \in \tilde{K}$. Damit existiert ein $\delta \in]0,1[$ mit

$$\hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) \in P^{-1}(K_1(0)\backslash\{0\}), \quad \text{für } (\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) \in \tilde{K} \times \left(P^{-1}(K_\delta(0)\backslash\{0\}) \cap Z_0\right).$$

Da $P^{-1}(K_\delta(0)\backslash\{0\}) \cap Z_0$ zusammenhängend ist (vergleiche Beweis von (7.35)i)), folgt aus der Stetigkeit von $\hat{\xi}_2$:
Es existiert eine Zusammenhangskomponente Z von $P^{-1}(K_1(0)\backslash\{0\})$ mit

$$\hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) \in Z, \quad \text{für } (\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) \in \tilde{K} \times P^{-1}(K_\delta(0)\backslash\{0\}) \cap Z_0.$$

Ferner folgt aus (7.22):

$$\hat{\xi}_2(\hat{\gamma}_+, \hat{\eta}_2) \in \widehat{\Omega}_0 \cap P^{-1}(]0,1[) \subset Z_0 \text{ falls } \hat{\eta}_2 \in P^{-1}(]0,\varepsilon[) \cap \widehat{\Omega}_0 \subset Z_0,$$

und damit gilt $Z = Z_0$.
Zu iii): Folgt aus iv) und (7.35)iii).
Zu iv): Mit (7.1) gilt $\xi_1(\eta_1,\eta_2)\,\xi_2(\eta_1,\eta_2) = \eta_1\eta_2$ für $(\eta_1,\eta_2) \in S_A$ und in (7.8) haben wir

$$\xi_1(]1,\infty[\times]0,1[) \subset]1,\infty[, \quad \xi_2(]1,\infty[\times]0,1[) \subset]0,1[$$

gezeigt. Daher gilt

$$\mathrm{Ln}(\xi_1(\eta_1,\eta_2)) + \mathrm{Ln}(\xi_2(\eta_1,\eta_2)) = \mathrm{Ln}(\eta_1) + \mathrm{Ln}(\eta_2), \quad (\eta_1,\eta_2) \in]1,\infty[\times]0,1[,$$

wobei mit Ln der Hauptzweig des Logarithmus gemeint ist.
Aus (7.22), der Definitionen von $\ln_0 : \widehat{\Omega} \to \mathbb{C}$ und $\ln : \widehat{\mathbb{C}^*} \to \mathbb{C}$ (siehe (2.10), (2.11)) folgt für $(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) \in \left(\tilde{P}^{-1}(]1,\infty[) \cap \widehat{\mathbb{C}^*}_+\right) \times \left(P^{-1}(]0,1[) \cap \widehat{\Omega}_0\right)$:

$$\ln_0\left(\hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2)\right) + \ln_0\left(\hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2)\right) = \ln(\hat{\eta}_1) + \ln_0(\hat{\eta}_2). \tag{7.39}$$

Sei nun $\rho > 1$. Wendet man in dem Gebiet $\left(\widehat{\mathbb{C}^*} \backslash \overline{\hat{K}_\rho}\right) \times \widehat{\mathcal{E}}(\rho)$ den Identitätssatz (9.6) zweimal an, so gilt (7.39) für $(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) \in \left(\widehat{\mathbb{C}^*} \backslash \overline{\hat{K}_\rho}\right) \times \widehat{\mathcal{E}}(\rho)$. Mit dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen mehrerer Variablen aus [5] folgt dann die Behauptung. □

8 Entwicklungssätze

Im vorherigen Kapitel haben wir die Funktionen $\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2$ eingeführt und deren analytisches Verhalten untersucht. Mit deren Hilfe lassen sich nun partiell holomorphe Lösungen von $\tilde{A}_1 w = 0$, deren Definitionsbereich ein Teilgebiet von $\hat{\xi}_1\left(\hat{S}_{A/I}\right) \times \hat{\xi}_2\left(\hat{S}_{A/I}\right)$ ist, als Lösungen von $\tilde{A}_2 u = 0$ auffassen, wobei $\tilde{A}_1$ und $\tilde{A}_2$ in (1.10),(1.12) definiert wurden. Separiert man jedoch $\tilde{A}_2 w = 0$, so enstehen die Differentialgleichungen (1.15) und (1.16). Im folgenden geben wir für diese Differentialgleichungen globale Lösungen im Sinne von (2.8) an.

(8.1) Bezeichnung:
Für $\nu \in \mathbb{C}$ und $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ bezeichnen wir

$$\nu^* := \nu^*(p) := \alpha_0 + \alpha_1 - 1 - \nu.$$

8.1 Zu den Lösungen der Differentialgleichung (1.16)

Für $\nu \in \mathbb{C}$ und $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ sei der parameterabhängige Differentialoperator $L_\nu^h(p) : \mathcal{H}\left(\widehat{\Omega}\right) \to \mathcal{H}\left(\widehat{\Omega}\right)$ definiert durch:

$$\left(L_\nu^h(p)v\right)(\hat{z}) := z(z-1)v'' + \left[(2-\alpha_0-\alpha_1)\,z + (\alpha_0 - 1)\right]v' + \nu\nu^* v. \qquad (8.2)$$

v ist genau dann Lösung von (1.16) im Sinne von (2.8), wenn $v \in \operatorname{Kern}\left(L_\nu^h(p)\right)$ gilt. Sei hier - wie im folgenden - mit ${}_2\tilde{F}_1$ die bezüglich $(a,b,c,z) \in \mathbb{C}^3 \times K_1(0)$ holomorphe hypergeometrische Reihe

$${}_2\tilde{F}_1(a,b,c,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n!\Gamma(c+n)} z^n, \ |z| < 1, \quad (a,b,c) \in \mathbb{C}^3$$

gemeint.

(8.3) Definition:

1. *Wir bezeichnen für beliebiges $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ mit $F(a,b,c;\cdot) : \widehat{\Omega} \to \mathbb{C}$ die analytische Fortsetzung von ${}_2\tilde{F}_1(a,b,c,\cdot) : K_1(0) \to \mathbb{C}$ bei $\hat{\omega}_0 \in \widehat{\Omega}$.*
Bekanntlich ist $F : \mathbb{C}^3 \times \widehat{\Omega} \to \mathbb{C}$. stetig und partiell holomorph.

2. *Mit Hilfe von F definieren wir für $\nu \in \mathbb{C}$ die stetigen und partiell holomorphen Funktionen*
$$v_\nu^\infty, v_\nu^{(i,j)} : \Lambda \times \widehat{\Omega} \to \mathbb{C}, \ i,j \in \{1,2\}$$
mit $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ und $\hat{z} \in \widehat{\Omega}$ durch:
$$\begin{aligned} v_\nu^{(1,1)}(p,\hat{z}) &:= F(-\nu, -\nu^*, 1-\alpha_0, \hat{z}), \\ v_\nu^{(1,2)}(p,\hat{z}) &:= \hat{z}^{\alpha_0} F(\alpha_0 - \nu, \alpha_0 - \nu^*, 1+\alpha_0, \hat{z}), \\ v_\nu^{(2,1)}(p,\hat{z}) &:= F\left(-\nu, -\nu^*, 1-\alpha_1, \hat{T}(\hat{z})\right), \\ v_\nu^{(2,2)}(p,\hat{z}) &:= \left(\hat{T}(\hat{z})\right)^{\alpha_1} F\left(\alpha_1 - \nu, \alpha_1 - \nu^*, 1+\alpha_1, \hat{T}(\hat{z})\right), \end{aligned}$$

sowie mit $\hat{S}$ aus (2.20)

$$v_\nu^\infty(p,\hat{z}) := \hat{z}^\nu F\left(-\nu, \alpha_0-\nu, 1+\nu^*-\nu, \hat{S}(\hat{z})\right).$$

Da für $i,j\in\{1,2\}$, $\nu\in\mathbb{C}$ und $p\in\Lambda$ die Funktionen

$$v_\nu^{(i,j)}(p,\cdot)\circ\left(P|_{\widehat{\Omega}_0}\right)^{-1}:\Omega_0\to\mathbb{C},\quad v_\nu^\infty(p,\cdot)\circ\left(P|_{\widehat{\Omega}_0}\right)^{-1}:\Omega_0\to\mathbb{C}$$

Lösungen von (1.16) sind (siehe hierzu [15],[2]), so gilt $v_\nu^\infty(p,\cdot), v_\nu^{(i,j)}(p,\cdot)\in \text{Kern}\left(L_\nu^h(p)\right)$ für $i,j\in\{1,2\}$.
Nun werden wir einige Eigenschaften der oben definierten Funktionen auflisten:

(8.4) Bemerkung: *Sei $\nu\in\mathbb{C}$ und $p=(\alpha_0,\beta_0,\alpha_1,\beta_1,\hat{\gamma})\in\Lambda$.*

i) Im Fall $\alpha_0\notin\mathbb{Z}$ bilden $v_\nu^{(1,1)}(p,\cdot), v_\nu^{(1,2)}(p,\cdot)$ ein Fundamentalsystem aus Frobeniuslösungen von $L_\nu^h(p)\eta=0$ bei 0.

ii) Im Fall $\alpha_1\notin\mathbb{Z}$ bilden $v_\nu^{(2,1)}(p,\cdot), v_\nu^{(2,2)}(p,\cdot)$ ein Fundamentalsystem aus Frobeniuslösungen von $L_\nu^h(p)\eta=0$ bei 1.

iii) Im Fall $\nu-\nu^*\notin\mathbb{Z}$ bilden $v_\nu^\infty(p,\cdot), v_{\nu^*}^\infty(p,\cdot)$ ein Fundamentalsystem aus Frobeniuslösungen von $L_\nu^h(p)\eta=0$ bei ∞.

iv) Die Zusammenhangsmatrix $\mathbf{Q}_\nu^{01}(p)$ der Frobeniuslösungen bei 0 und bei 1 wird definiert durch:

$$\frac{\sin(\pi\alpha_1)}{\pi}(v_\nu^{(1,1)}(p,\cdot), v_\nu^{(1,2)}(p,\cdot)) =: (v_\nu^{(2,1)}(p,\cdot), v_\nu^{(2,2)}(p,\cdot))\circ\mathbf{Q}_\nu^{01}(p).$$

Deren Einträge lassen sich in [18] nachlesen.

v) Die Frobeniuslösungen bei 0 und 1 hängen mit denen bei ∞ wie folgt zusammen:

$$\frac{\sin(\pi(\nu-\nu^*))}{\pi}v_\nu^{(j,\kappa)}(p,\cdot) = \sigma_\nu^{(j,\kappa)}(p)v_\nu^\infty(p,\cdot) - \sigma_{\nu^*}^{(j,\kappa)}(p)v_{\nu^*}^\infty(p,\cdot),$$

wobei

$$\begin{aligned}
\sigma_\nu^{(1,1)}(p) &= \exp(-\pi i\nu)\frac{1}{\Gamma}(1+\nu-\alpha_0)\frac{1}{\Gamma}(-\nu^*),\\
\sigma_\nu^{(1,2)}(p) &= \exp(\pi i(\alpha_1-\nu))\frac{1}{\Gamma}(1+\nu)\frac{1}{\Gamma}(1+\nu-\alpha_1),\\
\sigma_\nu^{(2,1)}(p) &= \frac{1}{\Gamma}(-\nu^*)\frac{1}{\Gamma}(1+\nu-\alpha_1),\\
\sigma_\nu^{(2,2)}(p) &= \frac{1}{\Gamma}(1+\nu)\frac{1}{\Gamma}(1+\nu-\alpha_0).
\end{aligned}$$

vi) $v_\nu^{(1,2)} = \left(t_0 v_{\nu-\alpha_0}^{(1,1)}\right)$, $v_\nu^{(2,1)} = \left(t_{01} v_\nu^{(1,1)}\right)$, $v_\nu^{(2,2)} = \left(t_1 t_{01} v_{\nu-\alpha_1}^{(1,1)}\right)$,
$v_\nu^{(i,j)} = v_{\nu^*}^{(i,j)}$, $i,j \in \{1,2\}$.

In Punkt vi) lässt sich sofort nachprüfen. Hierbei ist $\left(t_0 v_{\nu-\alpha_0}^{(1,1)}\right)$als $\left(t_0 v_{\tilde{\nu}}^{(1,1)}\right)|_{\tilde{\nu}=\nu-\alpha_0}$ zu verstehen. Analoges gilt für $\left(t_1 t_{01} v_{\nu-\alpha_1}^{(1,1)}\right)$. Die anderen Aussagen lassen sich in [2], [15] oder in [14] nachlesen.

8.2 Entwicklung nach hypergeometrischen Funktionen

In diesem Abschnitt seien $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$, $1 < \rho \leq \infty$ und $\nu \in \mathbb{C}$ mit

$$\nu - \nu^* \notin \mathbb{Z}.$$

Wir definieren, unter Berücksichtigung von $d_\infty\left(\widehat{\Omega}_\infty^+\right) = \widehat{\Omega}_\infty^+$ den Funktionenraum

$$\mathcal{V}_\nu(\rho) \quad := \quad \left\{ f \in \mathcal{H}\left(\widehat{\mathcal{E}}(\rho) \cap \widehat{\Omega}_\infty^+\right) \mid f \circ d_\infty = \exp\left(2\pi i \nu\right) f \right\}.$$

Aufgrund von $\nu - \nu^* \notin \mathbb{Z}$ folgt $\mathcal{V}_\nu(\rho) \cap \mathcal{V}_{\nu^*}(\rho) = \{0\}$ sowie

$$v_{\nu+n}^\infty(p,\cdot) \in \mathcal{V}_\nu\left(\rho\right) \backslash \{0\},\ v_{\nu^*-n}^\infty(p,\cdot) \in \mathcal{V}_{\nu^*}\left(\rho\right) \backslash \{0\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Mit der Funktion ϖ aus (3.4) und einer Kurve $\mathcal{C} : [0,1] \to \widehat{\mathcal{E}}(\rho) \cap \widehat{\Omega}_\infty^+$ mit $P \circ \mathcal{C}$ stückweise stetig differenzierbar und $\mathcal{C}(1) = d_\infty\left(\mathcal{C}(0)\right)$ lässt sich folgendes bilineares Funktional definieren:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_h : \mathcal{V}_\nu(\rho) \times \mathcal{V}_{\nu^*}(\rho) \to \mathbb{C}, \quad \langle v, v^* \rangle_h := \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\mathcal{C}} \varpi(-\alpha_0, -\alpha_1, 0, \cdot) v^* v. \tag{8.5}$$

Die Definition hängt nicht von der Wahl der Kurve $\mathcal{C}$ ab, da $\widehat{\mathcal{E}}(\rho) \cap \widehat{\Omega}_\infty^+$ einfach zusammenhängend ist und für $v \in \mathcal{V}_\nu(\rho)$, $v^* \in \mathcal{V}_{\nu^*}(\rho)$ und $\hat{z} \in \widehat{\mathcal{E}}(\rho) \cap \widehat{\Omega}_\infty^+$ gilt:

$$v\left(d_\infty(\hat{z})\right) v^*\left(d_\infty(\hat{z})\right) \varpi\left(-\alpha_0, -\alpha_1, 0, d_\infty(\hat{z})\right) = v\left(\hat{z}\right) v^*\left(\hat{z}\right) \varpi\left(-\alpha_0, -\alpha_1, 0, \hat{z}\right). \tag{8.6}$$

Ferner gilt mit $\hat{z} \in \widehat{\Omega}_+ \cap P^{-1}\left(\mathbb{C} \backslash \overline{K_1(0)}\right)$ und $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \hat{z}^{\alpha_1 - 1 - n}\left(1 - \hat{z}\right)^{-\alpha_1} &= \hat{z}^{\alpha_1 - 1 - n}\left(\hat{z} - 1\right)^{-\alpha_1} \exp\left(2\pi i \alpha_1\right) = z^{\alpha_1 - 1 - n}\left(z - 1\right)^{-\alpha_1} \exp\left(2\pi i \alpha_1\right) \\ &= z^{-1-n}\left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-\alpha_1} \exp\left(2\pi i \alpha_1\right), \end{aligned}$$

wobei hier bei den Potenzen jeweils der Hauptwert gemeint ist. Somit folgt

$$\begin{aligned} &\left\langle v_\nu^\infty(p,\cdot), v_{\nu^*-n}^\infty(p,\cdot)\right\rangle_h \\ =&\frac{\exp\left(2\pi i \alpha_1\right)}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=r>1} z^{-1-n}\left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-\alpha_1} \tilde{F}\left(-\nu, \alpha_0 - \nu, \nu^* - \nu + 1; \frac{1}{z}\right) \\ &\qquad \times \tilde{F}\left(-\nu^* + n, \alpha_0 - \nu^* + n, \nu - \nu^* + 1 + 2n; \frac{1}{z}\right) dz. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich $\left\langle v_\nu^\infty(p,\cdot), v_{\nu^*-n}^\infty(p,\cdot)\right\rangle_h = 0$ für $n \neq 0$ und

$$\left\langle v_\nu^\infty(p,\cdot), v_{\nu^*-n}^\infty(p,\cdot)\right\rangle_h = \frac{\exp\left(2\pi i \alpha_1\right)\sin(\pi(\nu-\nu^*))}{\pi(\nu-\nu^*)} \neq 0 \text{ für } n = 0.$$

Die nun folgenden Sätze lassen sich leicht modifiziert in [18], Seite 195 und in [19], Seite 138 nachlesen:

(8.7) Satz:
Sei $f \in \mathcal{V}_\nu(\rho)$. Dann existiert genau eine Koeffizientenfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ mit

$$f(\hat{z}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n v_{\nu+n}^\infty(p,\hat{z}) \ , \quad \hat{z} \in \hat{\mathcal{E}}(\rho) \cap \widehat{\Omega}_\infty^+,$$

wobei die Reihen absolut lokal gleichmäßig bezüglich $\hat{z}$ konvergieren und die b_n, $n \in \mathbb{Z}$ folgende Darstellung besitzen:

$$b_n = \frac{\left\langle f, v_{\nu^*-n}^\infty(p,\cdot)\right\rangle_h}{\left\langle v_{\nu+n}^\infty(p,\cdot), v_{\nu^*-n}^\infty(p,\cdot)\right\rangle_h}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{8.8}$$

Das asymptotische Verhalten der Funktionen v_ν^∞ für $\mathrm{Re}(\nu) \to \pm\infty$ lässt sich folgendermaßen beschreiben (man betrachte hierzu [15], Seite 245 oder [18]):

(8.9) Bemerkung:
Für $\hat{z} \in \widehat{\Omega}_\infty^+$ gilt

$$v_\nu^\infty\left(p,\hat{z}\right) =: \frac{1}{\Gamma}\left(1+\nu^*-\nu\right) z^{\frac{\alpha_0}{2}-\frac{1}{4}} \left(z-1\right)^{\frac{\alpha_1}{2}-\frac{1}{4}} \left(\frac{4}{\psi_0^{-1}(z)}\right)^{\frac{\nu^*-\nu}{2}} g_\nu\left(\frac{1}{\psi_0^{-1}(z)}\right),$$

mit einer Funktion $g_\nu : K_1(0) \to \mathbb{C}$, welche $g_{\nu+n}(x) = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ für $|n| \to \infty$ lokal gleichmäßig auf $K_1(0)$, erfüllt.

Sind die zu entwickelnden Funktionen zusätzlich von einem Parameter aus $\widehat{\mathbb{C}^*}$ abhängig so notieren wir etwas allgemeiner als in [18]:

(8.10) Bemerkung:
Seien $G \subset \widehat{\mathbb{C}^*}$ ein Gebiet und

$$f : G \times \left(\widehat{\Omega}_\infty^+ \cap \widehat{\mathcal{E}}(\rho)\right) \to \mathbb{C} \textit{ partiell holomorph mit } f(\hat{\eta}_1,\cdot) \in \mathcal{V}_\nu(\rho) \ \forall \ \hat{\eta}_1 \in G.$$

Dann existiert eine Funktionenfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, mit $b_n \in \mathcal{H}\left(G\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, mit

$$f\left(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n\left(\hat{\eta}_1\right) v_{\nu+n}^\infty(p,\hat{\eta}_2), \quad \left(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2\right) \in G \times \left(\hat{\mathcal{E}}(\rho) \cap \widehat{\Omega}_\infty^+\right), \tag{8.11}$$

wobei die Reihe absolut lokal gleichmäßig konvergiert. Zudem gilt:

$$b_n\left(\hat{\eta}_1\right) = \frac{\left\langle f\left(\hat{\eta}_1,\cdot\right), v_{\nu^*-n}^\infty(p,\cdot)\right\rangle_h}{\left\langle v_{\nu+n}^\infty(p,\cdot), v_{\nu^*-n}^\infty(p,\cdot)\right\rangle_h}, \ n \in \mathbb{Z}, \ \hat{\eta}_1 \in G, \tag{8.12}$$

sowie:

$$\limsup_{n\to\infty}\left(|b_n(\hat\eta_1)|\,(n!)^2\right)^{\frac{1}{n}} \le \frac{1}{\rho}, \quad \limsup_{n\to\infty}\left(|b_{-n}(\hat\eta_1)|\,(n!)^{-2}\right)^{\frac{1}{n}} \le 1 \qquad (8.13)$$

lokal gleichmäßig bezüglich $\hat\eta_1 \in G$.

Beweis:

Mit Hilfe von (8.7) erhält man für jedes $\hat\eta_1 \in K$ die Entwicklung (8.11), welche absolut lokal gleichmäßig (bezüglich $\hat\eta_2 \in \widehat{\mathcal{E}}(\rho)$) konvergiert, sowie (8.12).

Mit (8.12) und (8.9) folgt dann (8.13). Aus (8.9) und (8.13) folgt dann die absolute lokal gleichmäßige Konvergenz der Reihe in (8.11). $\square$

Ferner entnehmen wir aus [18], Seite 195:

(8.14) Bemerkung:

Für jede kompakte Menge $K \subset \widehat{\mathcal{E}}(\rho)$ existiert eine Konstante $0 < k < \infty$ und ein $1 < \rho_0 < \rho$ mit $K \subset \widehat{\mathcal{E}}(\rho_0)$, so dass

$$\left|v^{\infty}_{\nu\pm n}(\hat\eta_2)\right| \le k(n!)^{\pm 2}\rho_0^n, \quad \hat\eta_2 \in K, n \in \mathbb{N}.$$

8.3 Zu den Lösungen der Differentialgleichung (1.15)

Mit $\nu \in \mathbb{C}$ und $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat\gamma) \in \Lambda$ sei der parameterabhängige Differentialoperator $L^c_\nu(p) : \mathcal{H}\left(\widehat{\mathbb{C}^*}\right) \to \mathcal{H}\left(\widehat{\mathbb{C}^*}\right)$ definiert durch:

$$\begin{aligned}(L^c_\nu(p)u)(\hat z) \;&:=\; z^2u'' + \left((2-\alpha_0-\alpha_1)z - \gamma z^2\right)u' \qquad (8.15)\\ &\quad + \left(\left(\beta_0+\beta_1-\frac{1}{2}\gamma(2-\alpha_0-\alpha_1)\right)z + \nu\nu^*\right)u.\end{aligned}$$

u ist genau dann eine Lösung von (1.15) im Sinne von (2.8), wenn $u \in \operatorname{Kern}(L^c_\nu(p))$ gilt.

Transformiert man (1.15) mit $u(z) = z^\nu \tilde u(\tilde z)$, $\tilde z = \gamma z$, so erhält man die Differentialgleichung:

$$\tilde z\tilde u''(\tilde z) + (2(\nu+1) - \alpha_0 - \alpha_1 - \tilde z)\tilde u'(\tilde z) - (\nu + 1 - \alpha_0^*(p))\,\tilde u(\tilde z) = 0. \qquad (8.16)$$

Diese hat nun die Form der konfluenten hypergeometrischen Differentialgleichung (1.8) mit $c := 2(\nu+1) - \alpha_0 - \alpha_1 = \nu - \nu^* + 1$ und $a := \nu + 1 - \alpha_0^*(p)$.

Zudem wissen wir aus [15]:

$\tilde u$ ist Lösung von (8.16) genau dann, wenn w mit $\tilde u(z) = \exp(z)w(-z)$ Lösung von (1.8) ist mit $c := \nu - \nu^* + 1$, $a := \nu + 1 - \alpha_1^*(p) = \nu + 1 - \alpha_0^*(\tau_\infty(p))$.

Somit gilt für $u, \tilde u \in H\left(\widehat{\mathbb{C}^*}\right)$ mit $u(\hat z) = \exp(\gamma z)\,\tilde u(\hat z)$, $\hat z \in \widehat{\mathbb{C}^*}$:

$$\tilde u \in \operatorname{Kern}(L^c_\nu(\tau_\infty(p))) \Leftrightarrow u \in \operatorname{Kern}(L^c_\nu(p)).$$

Sei hier - wie im folgenden - mit $\tilde{\phi} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ die bezüglich $(a, c, z) \in \mathbb{C}^3$ holomorphe konfluente hypergeomerische Reihe

$$\tilde{\phi}(a, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{\Gamma(c+n)n!} z^n, \quad (a, c, z) \in \mathbb{C}^3$$

bezeichnet.
Wir definieren die partiell holomorphe Funktion $\phi : \mathbb{C}^2 \times \widehat{\mathbb{C}^*} \to \mathbb{C}$ durch

$$\phi(a, c, \hat{z}) := \tilde{\phi}\,(a, c, z)\,, \quad (a, c, \hat{z}) \in \mathbb{C}^2 \times \widehat{\mathbb{C}^*}.$$

Für $a, c \in \mathbb{C}$ sei $\psi\,(a, c, \cdot) : \widehat{\mathbb{C}^*} \to \mathbb{C}$ die analytische Fortsetzung von $\tilde{\psi}\,(a, c, \cdot)$ bei $\hat{\gamma}_0 \in \widehat{\mathbb{C}^*}$, mit $\tilde{\psi}$ aus (5.41).
Die partielle Holomorphie von $\psi : \mathbb{C}^2 \times \widehat{\mathbb{C}^*} \to \mathbb{C}$, sowie

$$\psi\,(a, c, \hat{z}) \sim \hat{z}^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(a)_n (a-c+1)_n}{n!} z^n, \text{ für } |\arg(\hat{z})| < \frac{3\pi}{2},\ z \to \infty,$$

sind bekannt.

Nun wollen wir globale Lösungen von $L_\nu^c(p)\eta = 0$ mit Hilfe von ϕ und ψ darstellen. Wir betrachten hierzu

(8.17) Bemerkung, Definition:
Sei $m : \widehat{\mathbb{C}^*}^2 \to \widehat{\mathbb{C}^*}$ die eindeutige Liftung der Funktion

$$\tilde{m} : \widehat{\mathbb{C}^*}^2 \ni (\hat{\gamma}, \hat{z}) \to \gamma z \in \mathbb{C}^*,$$

mit $m(\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_0) = \hat{\gamma}_0$. Diese ist partiell holomorph und erfüllt

$$\arg\left(m\left(\hat{\gamma}, \hat{z}\right)\right) = \arg\left(\hat{\gamma}\right) + \arg\left(\hat{z}\right), \quad \hat{\gamma}, \hat{z} \in \widehat{\mathbb{C}^*}.$$

Beweis:
Aufgrund von (9.13),(9.14) aus dem Anhang existiert m und ist partiell holomorph. Zudem gilt mit (2.12):

$$\arg\left(m\left(\hat{\gamma}, \hat{z}\right)\right) - \arg\left(\hat{\gamma}\right) - \arg\left(\hat{z}\right) \in 2\pi i\mathbb{Z}, \quad \hat{\gamma}, \hat{z} \in \widehat{\mathbb{C}^*}.$$

Mit $\arg\left(\tilde{m}\left(\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_0\right)\right) = \arg\left(\hat{\gamma}_0\right) = 0 = \arg\left(\hat{\gamma}_0\right) + \arg\left(\hat{\gamma}_0\right)$ folgt aus der Stetigkeit von m und arg die Behauptung. $\square$

Ist nun $y \in \mathcal{H}\left(\widehat{\mathbb{C}^*}\right)$ globale Lösung von (8.16), so gilt mit der Kettenregel (2.4)iii) $\left(m\left(\hat{\gamma}, \cdot\right)\right)^\nu y \circ m\left(\hat{\gamma}, \cdot\right) \in \operatorname{Kern}\left(L_\nu^c(p)\right).$

(8.18) Definition: *Für $\nu \in \mathbb{C}$ definieren wir die partiell holomorphen Funktionen*

$$u_\nu, u_\nu^1, u_\nu^2, H_\nu^1, H_\nu^2 : \Lambda \times \widehat{\mathbb{C}^*} \to \mathbb{C}$$

mit $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ *und* $\hat{z} \in \widehat{\mathbb{C}^*}$ *durch*

$$\begin{aligned}
u_\nu(p,\hat{z}) :=& m^\nu(\hat{\gamma},\hat{z})\,\phi(\nu+1-\alpha_0^*(p), \nu-\nu^*+1, \gamma z),\\
u_\nu^1(p,\hat{z}) :=& -\frac{1}{\Gamma}(\alpha_1^*(p)-\nu)\,u_\nu(p,\hat{z}),\\
u_\nu^2(p,\hat{z}) :=& \exp(i\pi(\alpha_1^*(p)-\nu))\frac{1}{\Gamma}(\alpha_0^*(p)-\nu)\,u_\nu(p,\hat{z}),\\
H_\nu^1(p,\hat{z}) :=& m^\nu(\hat{\gamma},\hat{z})\,\psi(\nu+1-\alpha_0^*(p), \nu-\nu^*+1, m(\hat{\gamma},\hat{z})),\\
H_\nu^2(p,\hat{z}) :=& \exp(i\pi(\alpha_1^*(p)-1))\exp(\gamma z)H_\nu^1\left(\tau_\infty^{-1}(p),\hat{z}\right).
\end{aligned}$$

Hiermit gilt:

(8.19) Bemerkung:
Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ *und* $\nu \in \mathbb{C}$.

i) Im Fall $\nu - \nu^* \notin \mathbb{Z}$ *bilden* $u_\nu(p,\cdot), u_{\nu^*}(p,\cdot)$ *ein Fundamentalsystem aus Frobeniuslösungen bei* 0 *von* $L_\nu^c(p)v = 0$.

ii) $H_\nu^1(p,\cdot), H_\nu^2(p,\cdot)$ *bilden ein Fundamentalsystem aus asymptotischen Lösungen bei* ∞ *von* $L_\nu^c(p)v = 0$.

iii) Die Frobeniuslösungen und die asymptotischen Lösungen bei ∞ *hängen wie folgt zusammen:*

$$\frac{\sin\pi(\nu-\nu^*)}{\pi}H_\nu^j = u_\nu^j - u_{\nu^*}^j, \quad j = 1,2. \tag{8.20}$$

iv) Die Monodromiematrix $\mathbf{M}_\nu^\infty(p)$ *der asymptotischen Lösungen wird definiert durch*

$$\left(H_\nu^1(p,\delta_{2\pi}(\hat{z})), H_\nu^2(p,\delta_{2\pi}(\hat{z}))\right) =: \left(H_\nu^1(p,\hat{z}), H_\nu^2(p,\hat{z})\right)\circ \mathbf{M}_\nu^\infty(p),\ \ \hat{z} \in \widehat{\mathbb{C}^*} \tag{8.21}$$

Deren Einträge lassen mit Hilfe von [15] Seite 173 herleiten.

v) $H_\nu^j = H_{\nu^*}^j,\ j \in \{1,2\}$,

Der letzte Punkt der obigen Bemerkung lässt sich leicht mit Hilfe der Asymptotik nachprüfen, und die übrigen Punkte sind leicht modifiziert in [2],[15] und [10] nachzulesen.

8.4 Entwicklung nach konfluenten hypergeometrischen Funktionen

In diesem Abschnitt seien $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$, $1 < \rho \leq \infty$ und $\nu \in \mathbb{C}$ mit

$$\nu - \nu^* \notin \mathbb{Z} \text{ und } \nu \notin \alpha_1^*(p) + \mathbb{Z}.$$

Wir definieren den Funktionenraum

$$\mathcal{U}_\nu(\rho) \ := \ \left\{ f \in \mathcal{H}\left(\widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_\rho}\right) | f \circ \delta_{2\pi} = \exp(2\pi i\nu) f \right\}.$$

Aufgrund von $\nu - \nu^* \notin \mathbb{Z}$ folgt $\mathcal{U}_\nu(\rho) \cap \mathcal{U}_{\nu^*}(\rho) = \{0\}$.
Da noch $\nu \notin \alpha_1^*(p) + \mathbb{Z}$ gilt, folgt $u^1_{\nu+n}(p,\cdot) \in \mathcal{V}_\nu(\rho) \setminus \{0\}$ und $u^2_{\nu^*-n}(p,\cdot) \in \mathcal{V}_{\nu^*}(\rho) \setminus \{0\}$ für $n \in \mathbb{Z}$.
Mit der Funktion

$$\varpi_1 : \mathbb{C}^2 \times \widehat{\mathbb{C}^*} \ni (a, \gamma, \hat{z}) \to \exp(-\gamma z)\, \hat{z}^a \in \mathbb{C} \tag{8.22}$$

und einer Kurve $\mathcal{C} : [0,1] \to \widehat{\mathbb{C}^*} \setminus \overline{\hat{K}_\rho}$, mit $\mathcal{C}(1) = \delta_{2\pi}(\mathcal{C}(0))$ und $\tilde{P} \circ C$ stückweise stetig differenzierbar, definieren wir das bilineare Funktional:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_c : \mathcal{U}_\nu(\rho) \times \mathcal{U}_{\nu^*}(\rho) \to \mathbb{C}, \quad \langle f, f^* \rangle_c := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathcal{C}} \varpi_1(-\alpha_0 - \alpha_1, \gamma, \cdot) f^* f. \tag{8.23}$$

Man erkennt, dass die Definition nicht von der Wahl der Kurve $\mathcal{C}$ abhängig ist, da $\widehat{\mathbb{C}^*} \setminus \overline{\hat{K}_\rho}$ einfach zusammenhängend ist, und für $f \in \mathcal{U}_\nu(\rho)$, $f^* \in \mathcal{U}_{\nu^*}(\rho)$ und $\hat{z} \in \widehat{\mathbb{C}^*} \setminus \overline{\hat{K}_\rho}$ folgt:

$$f(\delta_{2\pi}(\hat{z}))\, f^*(\delta_{2\pi}(\hat{z}))\, \varpi_1(-\alpha_0 - \alpha_1, \gamma, \delta_{2\pi}(\hat{z})) = f(\hat{z})\, f^*(\hat{z})\, \varpi_1(-\alpha_0 - \alpha_1, \gamma, \hat{z}).$$

Man erhält sofort $\langle u_\nu(p,\cdot), u_{\nu^*-n}(p,\cdot) \rangle_c = 0$, für $n \neq 0$ und für $n = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} &\left\langle u^1_\nu(p,\cdot), u^2_{\nu^*-n}(p,\cdot) \right\rangle_c \\ &= -\exp\left(i\pi\left(\alpha_1^*(p) - \nu^*\right)\right) \hat{\gamma}^{\alpha_0+\alpha_1-1} \frac{\sin(\pi(\nu - \nu^*))}{\pi(\nu - \nu^*)} \frac{\sin(\pi(\alpha_1^*(p) - \nu))}{\pi} \neq 0. \end{aligned}$$

Die nun folgenden Sätze lassen sich leicht modifiziert aus [10] und [18] herleiten.
Mit Hilfe der Transformation:

$$y(z) = t(\widetilde{y}),\ y(z) = \exp\left(\frac{\gamma}{2} z\right) z^{\frac{\alpha_0+\alpha_1-1}{2}} \widetilde{y}(\zeta),\ \zeta = -\frac{i\gamma}{2} z \tag{8.24}$$

transformieren wir die *CHE* (1.5) für $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{K_1(0)}$ in eine Differentialgleichung der Form

$$\widetilde{y}'' + \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{a(\zeta)}{\zeta^2}\right) \widetilde{y}' + \left(1 + \frac{2i\frac{\beta_0+\beta_1}{\gamma}}{\zeta} + \frac{b(\zeta)}{\zeta^2}\right) \widetilde{y} = 0,\ \zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{K_{\frac{|\gamma|}{2}}(0)}. \tag{8.25}$$

Hierbei sind $a, b : \left(\mathbb{C} \setminus \overline{K_{\frac{|\gamma|}{2}}(0)}\right) \cup \{\infty\} \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen.
Transformiert man (1.15) durch $v = t(\widetilde{v})$, so erfüllt $\widetilde{v}$ die Differentialgleichung:

$$\widetilde{v}'' + \frac{1}{\zeta} \widetilde{v}' + \left(1 + \frac{2i\frac{\beta_0+\beta_1}{\gamma}}{\zeta} - \frac{\left(\nu + \frac{1-\alpha_0-\alpha_1}{2}\right)^2}{\zeta^2}\right) \widetilde{v} = 0. \tag{8.26}$$

Für $(f, f^*) \in \mathcal{U}_\nu(\rho) \times \mathcal{U}_{\nu^*}(\rho)$ und $M := \widehat{\mathbb{C}^*}_+ \cap \widehat{\mathbb{C}^*} \setminus \overline{\hat{K}_\rho}$

$$\tilde{f} := t\left(f \circ \left(\tilde{P}|_M\right)^{-1}\right) \text{ und } \tilde{f}^* := t\left(f^* \circ \left(\tilde{P}|_M\right)^{-1}\right)$$

gilt zudem mit $\tilde{\rho} \in]\rho, \infty[$:

$$\langle f, f^* \rangle_c = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\tau| = \tilde{\rho}\frac{|\gamma|}{2}} \frac{1}{\tau} \tilde{f}(\tau) \tilde{f}^*(\tau) d\tau. \tag{8.27}$$

Mit der Transformation t aus (8.24) lassen sich folgende Sätze und Bemerkungen leicht aus [18] herleiten. Analog zu Satz (2.30) aus [18] gilt

(8.28) Satz:
Sei $f \in \mathcal{U}_\nu(\rho)$. Dann existiert eine Koeffizientenfolge $(c_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ mit

$$f(\hat{z}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n u^1_{\nu+n}(p, \hat{z}), \quad \hat{z} \in \widehat{\mathbb{C}^*} \backslash \overline{\hat{K}_\rho},$$

wobei die Reihe absolut lokal gleichmäßig bezüglich $\hat{z}$ konvergiert und die c_n folgende Darstellung besitzen:

$$c_n = \frac{\left\langle f, u^2_{\nu^*-n}(p, \cdot) \right\rangle_c}{\left\langle u^1_{\nu+n}(p, \cdot), u^2_{\nu^*-n}(p, \cdot) \right\rangle_c}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Das asymptotische Verhalten der Funktionen u_ν für $\mathrm{Re}(\nu) \to \pm\infty$ lässt sich wie folgt beschreiben (man betrachte hierzu: [15], Seite 245):

(8.29) Bemerkung: *Für $\nu \in \mathbb{C}$, $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ und $\hat{z} \in \widehat{\mathbb{C}^*}$ gilt*

$$u_\nu(p, \hat{z}) =: \hat{\gamma}^\nu \hat{z}^\nu \exp\left(\frac{\gamma}{2} z\right) \frac{1}{\Gamma} (\nu - \nu^* + 1)\, g_\nu(z), \;\; \hat{z} \in \widehat{\mathbb{C}^*},$$

mit einer Funktion $g_\nu : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, welche $g_{\nu+n}(z) = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ für $|n| \to \infty$ lokal gleichmäßig bezüglich $z \in \mathbb{C}$ erfüllt.

Etwas allgemeiner als in [18] notieren wir:

(8.30) Bemerkung:
Seien $G \subset \widehat{\Omega}$ ein Gebiet und

$$f : \widehat{\mathbb{C}^*} \backslash \overline{\hat{K}_\rho} \times G \to \mathbb{C} \text{ partiell holomorph mit } f(\cdot, \hat{\eta}_2) \in \mathcal{U}_\nu(\rho), \hat{\eta}_2 \in G.$$

Dann existiert eine Funktionenfolge $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $c_n \in \mathcal{H}(G)$, mit

$$f(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(\hat{\eta}_2)\, u^1_{\nu+n}(p, \hat{\eta}_1), \quad (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \widehat{\mathbb{C}^*} \backslash \overline{\hat{K}_\rho} \times G, \tag{8.31}$$

wobei die Reihe absolut lokal gleichmäßig konvergiert mit

$$c_n(\hat{\eta}_2) = \frac{\left\langle f(\cdot, \hat{\eta}_2), u^2_{\nu^*-n}(p, \cdot) \right\rangle_c}{\left\langle u^1_{\nu+n}(p, \cdot), u^2_{\nu^*-n}(p, \cdot) \right\rangle_c}, \;\; n \in \mathbb{Z}, \;\; \hat{\eta}_2 \in G. \tag{8.32}$$

Zudem gilt:

$$\limsup_{n\to\infty}\left(|c_n(\hat\eta_2)|\,((n)!)^{-1}\right)^{\frac{1}{n}}=0,\ \limsup_{n\to\infty}\left(|c_{-n}(\hat\eta_2)|\,(n)!\right)^{\frac{1}{n}}\le\frac{|\gamma|\rho}{4}. \tag{8.33}$$

lokal gleichmäßig bezüglich $\hat\eta_2\in G$.

Dies folgt mit (8.28) und (8.29) und den Definitionen von $u_\nu^1\ u_\nu^2$ in (8.18) auf analoge Weise zu (8.10).
Aus [18], Seite 205, (2.35) entnehmen wir zudem:

(8.34) Bemerkung:

Für jede kompakte Menge $K\subset\widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat K_\rho}$ *existiert eine Konstante* $0<k<\infty$ *und ein* $1<\rho<\rho_0$ *mit* $K\subset\widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat K_{\rho_0}}$ *so dass*

$$\left.\begin{array}{l}\left|u^{1/2}_{\nu\pm n}(\hat\eta_1)\right|\\ \left|H^{1/2}_{\nu\pm n}(\hat\eta_1)\right|\end{array}\right\}\le k(n!)\left(\frac{4}{|\gamma|\rho_0}\right)^n,\quad \hat\eta_1\in K,n\in\mathbb{N}.$$

8.5 Charakteristische Exponenten und Floquetsche Lösungen

(8.35) Definition:

Sei $p\in\Lambda$, $\nu\in\mathbb{C}$ *und* $y\in\mathcal{F}\left(\Lambda\times\widehat\Omega\right)$, *mit* $y(p,\cdot)\in Kern(L(p))$. *Wir bezeichnen* ν *als charakteristischen Exponent von* $L(p)\eta=0$ *und* $y(p,\cdot)$, *als Floquetsche Lösung von* $L(p)\eta=0$ *zum charakteristischen Exponenten* ν, *genau dann wenn*

$$(\phi_\infty y)(p,\cdot)=\exp(2\pi i\nu)\,y(p,\cdot).$$

Mit $\Xi(p)$ *bezeichnen wir die Menge der charakteristischen Exponenten von* $L(p)\eta=0$.

Da $\mathcal{F}_\infty(p,\cdot)$ ein Fundamentalsystem von $L(p)\eta=0$ bildet, so ist $\nu\in\mathbb{C}$ genau dann ein charakteristischer Exponent von $L(p)\eta=0$, wenn $\exp(2\pi i\nu)$ Eigenwert der Monodromiematrix $\mathbf{M}_\infty(p)$ aus (5.36) ist.
In (5.36) haben wir

$$\begin{aligned}\det\mathbf{M}_\infty(p)=&\exp(2\pi i(\alpha_0+\alpha_1)),\\ \mathrm{Spur}\mathbf{M}_\infty(p)=&\exp(2\pi i\alpha_0^*(p))+\exp(2\pi i\alpha_1^*(p))+\tilde q(p)\cdot(\tilde q\circ\tau_\infty)(p)\\ =&2\exp(\pi i(\alpha_0+\alpha_1))\cos\left(\frac{2\pi(\beta_0+\beta_1)}{\gamma}\right)+\tilde q(p)\cdot(\tilde q\circ\tau_\infty)(p)\end{aligned}\tag{8.36}$$

gezeigt. Mit (6.7) sowie (6.6)iii) folgt dann

$$\mathrm{Spur}\mathbf{M}_\infty(p)=2\exp(\pi i(\alpha_0+\alpha_1))\,\Delta(p),$$

mit

$$\begin{aligned}\Delta(p):=&\cos(\pi(\alpha_0-\alpha_1))-2\pi^2(q\circ\tau_0)(q\circ\tau_1)\\ =&\cos(\pi(\alpha_0+\alpha_1))-2\pi^2q\,(q\circ\tau_0\circ\tau_1).\end{aligned}\tag{8.37}$$

Damit gilt:

$$\nu \in \Xi(p) \Leftrightarrow \cos(\pi(\nu - \nu^* + 1)) - \Delta(p) = 0 \Leftrightarrow \nu^* \in \Xi(p). \tag{8.38}$$

(8.39) Bemerkung:
Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ und $\nu \in \Xi(p)$. Dann gilt:

i) $\Xi(p) = (\nu + \mathbb{Z}) \, (\nu^* + \mathbb{Z})$,

ii) $\Xi(p) = \Xi(\tau_*(p)) = \Xi(\tau_{01}(p)) = \Xi(\tau_\infty(p)) = \Xi(\tau_0(p)) + \alpha_0 = \Xi(\tau_1(p)) + \alpha_1$.

Beweis:
Zu i): Dies folgt aus (8.38) und den Eigenschaften der cos-Funktion.
Zu ii): Aufgrund von (8.37) folgt $\Delta = \Delta \circ \tau_0 = \Delta \circ \tau_1$.
In (6.6), (6.8) haben wir $q \circ \tau_* = q$ sowie $q \circ \tau_0 \circ \tau_1 \circ \tau_* = q \circ \tau_0 \circ \tau_1$ gezeigt.
Mit $\alpha_0^*(p) + \alpha_1^*(p) = \alpha_0 + \alpha_1$ folgt dann $\Delta = \Delta \circ \tau_*$.
Mit (4.5)iv),v) und (6.6) folgt $\Delta = \Delta \circ \tau_{01} = \Delta \circ \tau_\infty$ und damit insgesamt

$$\Delta \circ \sigma = \Delta, \ \sigma \in \{\tau_0, \tau_1, \tau_{01}, \tau_\infty, \tau_*\}.$$

Aufgrund von (8.38) gilt somit $\Xi(p) = \Xi(\tau_*(p)) = \Xi(\tau_{01}(p)) = \Xi(\tau_\infty(p))$.
Mit $\Delta = \Delta \circ \tau_0 = \Delta \circ \tau_1$ und

$$\cos(\pi(\nu - \nu^* + 1)) = \cos(\pi(2(\nu - \alpha_0) + \alpha_0 - \alpha_1)) = \cos(\pi(2(\nu - \alpha_1) - \alpha_0 + \alpha_1))$$

folgt dann $\Xi(p) = \Xi(\tau_0(p)) + \alpha_0 = \Xi(\tau_1(p)) + \alpha_1$. □

Nun führen wir folgende Bezeichnung ein:
(8.40) Bemerkung, Definition:
Für $\nu \in \mathbb{C}$, $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ und $y \in \mathcal{F}\left(\Lambda \times \widehat{\Omega}\right)$ definieren wir:

$$(\pi_\nu y)(p, \cdot) := \frac{1}{2\pi i} \exp(\pi i \, (1 - \alpha_0 - \alpha_1)) \, ((\phi_\infty y)(p, \cdot) - \exp(2\pi i \nu^*) \, y(p, \cdot)).$$

Dann gilt $\frac{\sin(\pi(\nu - \nu^*))}{\pi} y = \pi_\nu y - \pi_{\nu^*} y$.
Im Fall $\nu \in \Xi(p)$ und $y(p, \cdot) \in Kern(L(p))$ gilt $\pi_\nu y(p, \cdot) \in \mathcal{V}_\nu(\infty)$.
Die Aussagen lassen sich in [19] und [18] nachlesen.

Wir wollen nun die Spezialfälle auflisten, bei denen eine der Frobeniuslösungen der *CHE* oder eine der asymptotischen Lösungen der *CHE* eine Floquetsche Lösung ist.
(8.41) Bemerkung, Definition:
Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$.
Man bezeichnet eine Lösung $y \in Kern(L(p))$ der Form

$$y(\hat{z}) = \hat{z}^{\sigma_0} (1 - \hat{z})^{\sigma_1} h(z), \quad \hat{z} \in \widehat{\Omega},$$

mit $\sigma_0 \in \{0, \alpha_0\}$, $\sigma_1 \in \{0, \alpha_1\}$ *und* h *ganze Funktion als quasireguläre Lösung.*
Mit q *aus (6.1) gilt:*

$$\begin{aligned}\exists y \in \mathit{Kern}\,(L(p)) \ \ \mathit{quasiregul\ddot{a}r} &\Leftrightarrow q(p) \cdot q \circ \tau_0 \circ \tau_1(p) \cdot q \circ \tau_0(p) \cdot q \circ \tau_1(p) = 0 \\ &\Leftrightarrow \Xi(p) \subset \{0, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_0 + \alpha_1\} + \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Wir verweisen hierzu auf die Arbeiten [19] und [18].
Zudem folgt aus den Darstellungen von $\mathbf{M}_\infty$, $\det \mathbf{M}_\infty$ und $\mathrm{Spur}\mathbf{M}_\infty$:

(8.42) Bemerkung:
Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$. *Dann gilt:*

$$\begin{aligned}&\tilde{\Psi}(p, \cdot) \in \mathit{Kern}\,(L(p)) \cap \mathcal{V}_\nu(\infty) \vee \Psi(p, \cdot) \in \mathit{Kern}\,(L(p)) \cap \mathcal{V}_\nu(\infty) \\ &\Leftrightarrow \tilde{q}(p) \cdot \tilde{q} \circ \tau_\infty(p) = 0 \Leftrightarrow \Xi(p) = \{\alpha_0^*(p), \alpha_1^*(p)\} + \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

8.6 Analytische Äquivalenz

In diesem Abschnitt werden wir das Konzept der *Analytischen Äquivalenz*, wie es in der Arbeit [18] zu finden ist, für unseren Fall verallgemeinern.
Der Einfachheit halber werden wir in dem nun folgenden Satz entweder die in (8.42) oder die in (8.41) besprochenen Spezialfälle ausschließen.
Bezüglich der Spezialfälle verweisen wir auf die Arbeit [18], mit deren Hilfe sich der Satz entsprechend verallgemeinern ließe.

(8.43) Satz:
Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ *und* $\nu \in \Xi(p)$.

1. *Sei* $\nu \notin \{\alpha_0^*(p), \alpha_1^*(p)\} + \mathbb{Z}$ *vorausgesetzt.*
   Dann existieren ein Isomorphismus

   $$\mathbb{H} : \mathit{Kern}\,(L_\nu^c(p)) \to \mathit{Kern}\,(L(p))$$

   mit $\mathbb{H}\,(H_\nu^1(p, \cdot)) = \Psi(p, \cdot)$ *und dazugehörige holomorphe Funktionen*

   $$H_j : S_A \dot{\cup} (\{\infty\} \times \mathbb{C}) \,\dot{\cup}\, \left(\mathbb{C} \backslash \overline{K}_1(0) \times \{0, 1\}\right) \to \mathbb{C} \ (j = 1, 2),$$

   so dass für $u \in \mathit{Kern}\,(L_\nu^c(p))$ *und* $y := \mathbb{H}(u)$ *gilt:*

   $$y\left(\hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)\right) = H_1(\eta_1, \eta_2) u(\hat{\eta}_1) + H_2(\eta_1, \eta_2) u'(\hat{\eta}_1), \ (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{S}_A.$$

2. *Sei* $\alpha_0, \alpha_1 \notin \mathbb{Z}$ *und* $\nu \notin \{0, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_0 + \alpha_1\} + \mathbb{Z}$ *vorausgesetzt.*
   Dann existieren ein Isomorphismus

   $$\mathbb{G} : \mathit{Kern}\left(L_\nu^h(p)\right) \to \mathit{Kern}\,(L(p))$$

   mit $\mathbb{G}\left(v_\nu^{(1,1)}(p, \cdot)\right) = \Phi(p, \cdot)$ *und dazugehörige holomorphe Funktionen*

   $$G_j : S_A \dot{\cup} (\{\infty\} \times \mathbb{C}) \,\dot{\cup}\, \left(\mathbb{C} \backslash \overline{K}_1(0) \times \{0, 1\}\right) \to \mathbb{C} \ (j = 1, 2),$$

so dass für $v \in Kern\left(L_\nu^h(p)\right)$ und $y := \mathbb{G}(v)$ gilt:

$$y\left(\hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2)\right) = G_1(\eta_1,\eta_2)v(\hat{\eta}_2) + G_2(\eta_1,\eta_2)\eta_2(\eta_2-1)v'(\hat{\eta}_2),\ (\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) \in \hat{S}_A.$$

Beweis:
Um diesen Satz zu zeigen gehen wir analog zu den Beweisen der Sätze (1.24) und (2.24) in [18] vor.
Zu 1.: Abkürzend schreiben wir $\Psi^1 := \Psi(p,\cdot), \Psi^2 := \tilde{\Psi}(p,\cdot)$, sowie

$$\mathbf{M}_\infty := \mathbf{M}_\infty(p), \quad \mathbf{M}_\nu^\infty := \mathbf{M}_\nu^\infty(p),$$

wobei $\mathbf{M}_\infty(p)$ in (5.36) und $\mathbf{M}_\nu^\infty(p)$ in (8.21) definiert wurden. Sei

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_\infty(\hat{\eta}_2) &:= \left(\Psi^1(\hat{\eta}_2), \Psi^2(\hat{\eta}_2)\right), \quad \hat{\eta}_2 \in \widehat{\Omega},\\ Y_{\infty,\nu}(\hat{\eta}_1) &:= \left(H_\nu^1(\hat{\eta}_1), H_\nu^2(\hat{\eta}_1)\right), \quad \hat{\eta}_1 \in \widehat{\mathbb{C}^*}.\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\tilde{Y}_\infty \circ d_\infty = \tilde{Y}_\infty \circ \mathbf{M}_\infty, \quad Y_{\infty,\nu} \circ \delta_{2\pi} = Y_{\infty,\nu} \circ \mathbf{M}_\nu^\infty.$$

Aufgrund der Voraussetzungen (vgl. Abschnitt II.3 aus [18]) gibt es ein $\tau \in \mathbb{C}^*$ mit:

$$\mathbf{M}_\nu^\infty \circ T = T \circ \mathbf{M}_\infty, \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix}. \tag{8.44}$$

Wir definieren nun (analog zum Beweis von Satz (2.24) aus [18]) mit T aus (8.44) die Abbildung

$$\mathbb{H} : \mathrm{Kern}\left(L_\nu^c(p)\right) = \left\{Y_{\infty,\nu} \circ T \cdot c | c \in \mathbb{C}^2\right\} \ni Y_{\infty,\nu} \circ T \cdot c \to \tilde{Y}_\infty \cdot c \in \mathrm{Kern}\left(L(p)\right).$$

Diese ist ein Isomorphismus und erfüllt $\mathbb{H}\left(H_\nu^1\right) = \Psi^1$.
Als nächstes definieren wir die partiell holomorphe Funktion

$$Y_\infty := \tilde{Y}_\infty \circ \hat{\xi}_1. \tag{8.45}$$

Diese hat für $(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) \in \hat{S}_A$ aufgrund des Umlaufverhaltens von $\hat{\xi}_1$ folgendes Umlaufverhalten bezüglich der ersten Variablen:

$$\begin{aligned}Y_\infty\left(\delta_{2\pi}(\hat{\eta}_1), \hat{\eta}_2\right) =& \tilde{Y}_\infty \circ \hat{\xi}_1\left(\delta_{2\pi}(\hat{\eta}_1), \hat{\eta}_2\right) = \tilde{Y}_\infty \circ d_\infty \circ \hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2)\\ =& \tilde{Y}_\infty \circ \hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) \circ \mathbf{M}_\infty = Y_\infty(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) \circ \mathbf{M}_\infty.\end{aligned} \tag{8.46}$$

Nun definieren wir mit T aus (8.44) die stetige und partiell holomorphe Abbildung

$$H(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) \;:=\; Y_\infty(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) \circ T^{-1} \circ \begin{pmatrix} Y_{\infty,\nu}(\hat{\eta}_1) \\ Y'_{\infty,\nu}(\hat{\eta}_1) \end{pmatrix}^{-1}, \ (\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) \in \hat{S}_A. \tag{8.47}$$

Über die Gleichung

$$Y_\infty(\hat\eta_1,\hat\eta_2) = H(\hat\eta_1,\hat\eta_2)\circ\begin{pmatrix} Y_{\infty,\nu}(\hat\eta_1)\\ Y'_{\infty,\nu}(\hat\eta_1)\end{pmatrix}\circ T,\ (\hat\eta_1,\hat\eta_2)\in\hat S_A \tag{8.48}$$

folgt für $u := Y_{\infty,\nu}\circ T\cdot c\in \operatorname{Kern}(L^c_\nu(p))$, $c\in\mathbb{C}^2$:

$$\mathbb{H}(u)\circ\hat\xi_1(\hat\eta_1,\hat\eta_2) = H(\hat\eta_1,\hat\eta_2)\circ\begin{pmatrix} u(\hat\eta_1)\\ u'(\hat\eta_1)\end{pmatrix},\ (\hat\eta_1,\hat\eta_2)\in\hat S_A.$$

Aus (8.48) und (8.46) folgt außerdem

$$\begin{aligned} H(\hat\eta_1,\hat\eta_2)\circ\begin{pmatrix} Y_{\infty,\nu}(\hat\eta_1)\\ Y'_{\infty,\nu}(\hat\eta_1)\end{pmatrix}\circ T\circ\mathbf{M}_\infty &= Y_\infty(\hat\eta_1,\hat\eta_2)\circ\mathbf{M}_\infty = Y_\infty(\delta_{2\pi}(\hat\eta_1),\hat\eta_2)\\ &= H(\delta_{2\pi}(\hat\eta_1),\hat\eta_2)\circ\begin{pmatrix} Y_{\infty,\nu}(\delta_{2\pi}(\hat\eta_1))\\ Y'_{\infty,\nu}(\delta_{2\pi}(\hat\eta_1))\end{pmatrix}\circ T\\ &= H(\delta_{2\pi}(\hat\eta_1),\hat\eta_2)\circ\begin{pmatrix} Y_{\infty,\nu}(\hat\eta_1)\\ Y'_{\infty,\nu}(\hat\eta_1)\end{pmatrix}\circ\mathbf{M}^\infty_\nu\circ T,\ (\hat\eta_1,\hat\eta_2)\in\hat S_A.\end{aligned}$$

Aus $\mathbf{M}^\infty_\nu\circ T = T\circ\mathbf{M}_\infty$ folgt dann

$$H(\delta_{2\pi}(\hat\eta_1),\hat\eta_2) = H(\hat\eta_1,\hat\eta_2),\quad (\hat\eta_1,\hat\eta_2)\in\hat S_A.$$

Aufgrund von (7.29), (8.45) und (8.47) erhalten wir:

$$H(\hat\eta_1, d_j(\hat\eta_2)) = H(\hat\eta_1,\hat\eta_2),\quad (\hat\eta_1,\hat\eta_2)\in\hat S_A,\quad j=0,1.$$

Damit existiert ein $\mathbf{H}: S_A\to\mathbb{C}^{1\times 2}$ holomorph mit

$$\mathbf{H}(\eta_1,\eta_2) = H(\hat\eta_1,\hat\eta_2),\quad (\hat\eta_1,\hat\eta_2)\in\hat S_A.$$

Nun ist für festes $\eta_2\in\Omega$ der Punkt $\eta_1=\infty$ isolierte Singularität von

$$\mathbf{H}(\cdot,\eta_2): S_A^{1,\eta_2}\to\mathbb{C}^{1\times 2}.$$

Über (7.36)i), iii) und

$$\xi_1(\eta_1,\eta_2) = \eta_1\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{1}{\eta_1}\right)\right),\ \eta_1\to\infty, \tag{8.49}$$

$(\eta_1,\eta_2)\in D$ lokal gleichmäßig bezüglich η_2 erhält man dann:

1. Für $\hat\eta_2\in\widehat{\Omega}$ fest und $\hat\eta_1\in\left\{\hat z\in\widehat{\mathbb{C}^*} \mid |\arg(\hat z)+\arg(\hat\gamma)|\le\frac{3\pi}{2}-\delta\right\}\cap\hat S_A^{1,\hat\eta_2}$, $\delta>0$ gilt:

$$\Psi^1\circ\hat\xi_1(\hat\eta_1,\hat\eta_2) = \hat\eta_1^{\alpha_0^*(p)-1}\mathcal{O}(1),\quad \eta_1\to\infty.$$

2. Für $\hat{\eta}_2 \in \widehat{\Omega}$ fest und
$\hat{\eta}_1 \in \left\{ \hat{z} \in \widehat{\mathbb{C}^*} \,|\, |\arg(\hat{z}) + \arg(\hat{\gamma}) - \pi| \leq \frac{3\pi}{2} - \delta \right\} \cap \hat{S}_A^{1,\hat{\eta}_2}$, $\delta > 0$ gilt:

$$\Psi^2 \circ \hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \quad = \quad \exp\left(\gamma\eta_1\right) \hat{\eta}_1^{\alpha_1^*(p)-1} \mathcal{O}\left(1\right), \quad \eta_1 \to \infty.$$

Damit und mit (8.47) folgt (vgl. den Beweis von Satz(2.24) aus [18]), dass für $\eta_2 \in \Omega$ die Funktion $\mathbf{H}\left(\cdot, \eta_2\right)$ in ∞ holomorph fortsetzbar ist. Hierbei wird die Asymptotik von $Y_{\infty,\nu}\left(\hat{\eta}_1\right)$ benötigt.
Wir bezeichnen die holomorphe Fortsetzung wieder mit $\mathbf{H}\left(\cdot, \eta_2\right)$.
Mit der lokal gleichmäßigen Konvergenz in (8.49) ist dann insgesamt

$$\mathbf{H} : S_A \cup \left(\{\infty\} \times \Omega\right) \to \mathbb{C}^{1\times 2}$$

partiell holomorph und damit holomorph.
Da für alle $\rho > 1$

$$\left(\mathbb{C} \backslash \overline{K_\rho(0)}\right) \times \mathcal{E}(\rho) \subset S_A$$

gilt, hat für $\eta_1 \in \mathbb{C} \backslash \overline{K_\rho(0)}$ die Funktion $\mathbf{H}(\eta_1, \cdot)$ isolierte Singularitäten bei 0 und bei 1. Aufgrund von (7.35)i)ii) und (8.47) folgt die holomorphe Fortsetzbarkeit von $\mathbf{H}$ auf

$$S_A \cup \left(\{\infty\} \times \Omega\right) \cup \left(\mathbb{C}^* \backslash \overline{K}_\rho(0) \times \{0, 1\}\right).$$

Somit sind die Punkte $(\infty, 0)\,(\infty, 1)$ isolierte Singularitäten der Funktion $\mathbf{H}$. Aus einem Spezialfall des *Kugelsatzes* (siehe hierzu [5], Satz 1.3, Seite 34) folgt dann, dass sich $\mathbf{H}$ in den Punkten $(\infty, 0)\,(\infty, 1)$ holomorph fortsetzen lässt. Setzt man

$$\mathbf{H} =: (H_1, H_2)$$

so folgt die Behauptung 1..
Zu 2.: Abkürzend schreiben wir

$$\mathbf{Q}_{01} := \mathbf{Q}_{01}(p), \quad \mathbf{Q}_\nu^{01} := \mathbf{Q}_\nu^{01}(p),$$

wobei $\mathbf{Q}_{01}(p)$ in (6.1) und $\mathbf{Q}_\nu^{01}(p)$ in (8.4) definiert wurden. Da $\alpha_0, \alpha_1 \notin \mathbb{Z}$ vorausgesetzt wurde, bilden jeweils $\mathcal{F}_0(p, \cdot)$ und $\mathcal{F}_1(p, \cdot)$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $L(p)y = 0$. Dies gilt auch jeweils für $\left(v_\nu^{(1,1)}\left(p, \cdot\right), v_\nu^{(1,2)}\left(p, \cdot\right)\right)$ und $\left(v_\nu^{(2,1)}\left(p, \cdot\right), v_\nu^{(2,2)}\left(p, \cdot\right)\right)$ für die Differentialgleichung $L_\nu^h(p)v = 0$.
Wir definieren abkürzend

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}_j : \widehat{\Omega} \to \mathbb{C}^2, &\qquad \tilde{Y}_j\left(\hat{\eta}_2\right) := \mathcal{F}_j(p, \hat{\eta}_2), \quad \hat{\eta}_2 \in \widehat{\Omega}, \quad j = 0, 1, \\
Y_{j,\nu} : \widehat{\Omega} \to \mathbb{C}^2, &\qquad Y_{j,\nu}\left(\hat{\eta}_2\right) := \left(v_\nu^{(j+1,1)}\left(p, \hat{\eta}_2\right), v_\nu^{(j+1,2)}\left(p, \hat{\eta}_2\right)\right), \quad \hat{\eta}_2 \in \widehat{\Omega}, \ j = 0, 1.
\end{aligned}$$

Damit gilt also mit $D_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\left(2\pi i \alpha_1\right) \end{pmatrix}$:

$$\tilde{Y}_0 \circ d_1 = \tilde{Y}_0 \circ \mathbf{Q}_{01}^{-1} \circ D_1 \circ \mathbf{Q}_{01}, \quad Y_{0,\nu} \circ d_1 = Y_{0,\nu} \circ \left(\mathbf{Q}_\nu^{01}\right)^{-1} \circ D_1 \circ \mathbf{Q}_\nu^{01}.$$

Aufgrund der Voraussetzungen (vgl. Abschnitt I.3 aus [18]) existieren $\tau, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2 \in \mathbb{C}^*$, mit:

$$\mathbf{Q}_{01} \circ T = \tilde{T} \circ \mathbf{Q}_{\nu}^{01}, \quad T := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix}, \quad \tilde{T} := \begin{pmatrix} \tilde{\tau}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\tau}_2 \end{pmatrix}. \tag{8.50}$$

Wir definieren nun (vgl. Beweis von Satz(1.24) aus [18]) mit T aus (8.50) die Abbildung

$$\mathbb{G} : \text{Kern}\left(L_{\nu}^{h}(p)\right) = \left\{Y_{0,\nu} \circ T^{-1} \cdot c | c \in \mathbb{C}^2\right\} \ni Y_{0,\nu} \circ T^{-1} \cdot c \to \tilde{Y}_0 \cdot c \in \text{Kern}\left(L(p)\right).$$

Diese ist ein Isomorphismus und erfüllt $\mathbb{G}\left(v_{\nu}^{(1,1)}(p,\cdot)\right) = \Phi(p,\cdot)$.
Als nächstes definieren wir die stetigen und partiell holomorphen Abbildungen

$$Y_j : \hat{S}_A \to \mathbb{C}^2 \;\text{ mit } Y_j := \tilde{Y}_j \circ \hat{\xi}_2, \quad j = 0, 1. \tag{8.51}$$

Dann gilt wegen des Umlaufverhaltens von $\hat{\xi}_2$:

$$\begin{aligned} Y_0\left(\hat{\eta}_1, d_1\left(\hat{\eta}_2\right)\right) =& \tilde{Y}_0 \circ \hat{\xi}_2\left(\hat{\eta}_1, d_1\left(\hat{\eta}_2\right)\right) = \tilde{Y}_0 \circ d_1 \circ \hat{\xi}_2\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right) \\ =& \tilde{Y}_0 \circ \hat{\xi}_2\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right) \circ \mathbf{Q}_{01}^{-1} \circ D_1 \circ \mathbf{Q}_{01} \\ =& Y_0\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right) \circ \mathbf{Q}_{01}^{-1} \circ D_1 \circ \mathbf{Q}_{01}, \; \left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right) \in \hat{S}_A. \end{aligned} \tag{8.52}$$

Definiert man mit T aus (8.50) die Abbildung $G : \hat{S}_A \to \mathbb{C}^2$ durch

$$G\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right) \;:=\; Y_0(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \circ T \circ \begin{pmatrix} Y_{0,\nu}(\hat{\eta}_2) \\ Y_{0,\nu}'(\hat{\eta}_2) \end{pmatrix}^{-1}, \; \left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right) \in \hat{S}_A, \tag{8.53}$$

so ist diese partiell holomorph und stetig.
Mit der Gleichung

$$\tilde{Y}_0 \circ \hat{\xi}_2\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right) = Y_0(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = G\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right) \circ \begin{pmatrix} Y_{0,\nu}(\hat{\eta}_2) \\ Y_{0,\nu}'(\hat{\eta}_2) \end{pmatrix} \circ T^{-1}, \tag{8.54}$$

für $\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right) \in \hat{S}_A$, gilt für $v := Y_{0,\nu} \circ T^{-1} \cdot c \in \text{Kern}\left(L_{\nu}^{h}(p)\right)$, $c \in \mathbb{C}^2$:

$$\mathbb{G}\left(v\right) \circ \hat{\xi}_2\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right) = G\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right) \circ \begin{pmatrix} v(\hat{\eta}_2) \\ v'(\hat{\eta}_2) \end{pmatrix}, \; \left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right) \in \hat{S}_A.$$

Aufgrund des Umlaufverhaltens von $\hat{\xi}_2$ in (7.29) folgt für $\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right) \in \hat{S}_A$

$$G\left(\hat{\eta}_1, d_0\left(\hat{\eta}_2\right)\right) = G\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right).$$

Über (8.54) und (8.52) die Gleichung:

$$\begin{aligned} & G\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right) \circ \begin{pmatrix} Y_{0,\nu}(\hat{\eta}_2) \\ Y_{0,\nu}'(\hat{\eta}_2) \end{pmatrix} \circ T^{-1} \circ \mathbf{Q}_{01}^{-1} \circ D_1 \circ \mathbf{Q}_{01} = Y_0(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \circ \mathbf{Q}_{01}^{-1} \circ D_1 \circ \mathbf{Q}_{01} \\ & = Y_0\left(\hat{\eta}_1, d_1\left(\hat{\eta}_2\right)\right) = G\left(\hat{\eta}_1, d_1\left(\hat{\eta}_2\right)\right) \circ \begin{pmatrix} Y_{0,\nu}\left(d_1\left(\hat{\eta}_2\right)\right) \\ Y_{0,\nu}'\left(d_1\left(\hat{\eta}_2\right)\right) \end{pmatrix} \circ T^{-1} \\ & = G\left(\hat{\eta}_1, d_1\left(\hat{\eta}_2\right)\right) \circ \begin{pmatrix} Y_{0,\nu}(\hat{\eta}_2) \\ Y_{0,\nu}'(\hat{\eta}_2) \end{pmatrix} \circ \left(\mathbf{Q}_{\nu}^{01}\right)^{-1} \circ D_1 \circ \mathbf{Q}_{\nu}^{01} \circ T^{-1}, \; \left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right) \in \hat{S}_A. \end{aligned}$$

Aus $\mathbf{Q}_{01} \circ T = \tilde{T} \circ \mathbf{Q}_\nu^{01}$ und $D_1 \circ \tilde{T}^{-1} = \tilde{T}^{-1} \circ D_1$ folgt für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{S}_A$:

$$\begin{aligned} &G(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \circ Y_{0,\nu}(\hat{\eta}_2) \circ \left(\mathbf{Q}_\nu^{01}\right)^{-1} \circ \tilde{T}^{-1} \circ D_1 \circ \mathbf{Q}_{01} \\ &\qquad = G(\hat{\eta}_1, d_1(\hat{\eta}_2)) \circ Y_{0,\nu}(\hat{\eta}_2) \circ \left(\mathbf{Q}_\nu^{01}\right)^{-1} \circ D_1 \circ \tilde{T}^{-1} \circ \mathbf{Q}_{01} \\ &\qquad = G(\hat{\eta}_1, d_1(\hat{\eta}_2)) \circ Y_{0,\nu}(\hat{\eta}_2) \circ \left(\mathbf{Q}_\nu^{01}\right)^{-1} \circ \tilde{T}^{-1} \circ D_1 \circ \mathbf{Q}_{01} \end{aligned}$$

und somit

$$G(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = G(\hat{\eta}_1, d_1(\hat{\eta}_2)), \quad (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{S}_A.$$

Aufgrund von (7.29), (8.51) und (8.53) folgt außerdem:

$$G(\delta_{2\pi}(\hat{\eta}_1), \hat{\eta}_2) = G(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2), \quad (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{S}_A.$$

Damit existiert ein $\mathbf{G} : S_A \to \mathbb{C}^{1\times 2}$ holomorph mit

$$\mathbf{G}(\eta_1, \eta_2) = G(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2), \quad (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{S}_A.$$

Nun ist für festes $\eta_2 \in \Omega$ der Punkt $\eta_1 = \infty$ isolierte Singularität von

$$\mathbf{G}(\cdot, \eta_2) : S_A^{1,\eta_2} \to \mathbb{C}^{1\times 2}.$$

Wegen (7.35)iii) und (8.53) lässt sich $\mathbf{G}$ holomorph auf $S_A \cup (\{\infty\} \times \Omega)$ fortsetzen. Wir bezeichnen die Fortsetzung wieder mit

$$\mathbf{G} : S_A \cup (\{\infty\} \times \Omega) \to \mathbb{C}^{1\times 2}.$$

Für alle $\rho > 1$ folgt

$$\left(\mathbb{C}\backslash\overline{K_\rho(0)}\right) \times \mathcal{E}(\rho) \subset S_A.$$

Somit hat für $\eta_1 \in \mathbb{C}\backslash\overline{K_\rho(0)}$ die Funktion $\mathbf{G}(\eta_1, \cdot)$ isolierte Singularitäten bei 0 und bei 1.
Sei nun $\hat{\eta}_1 \in \widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_\rho}$ fest. Aufgrund von (7.36) existiert ein $\delta \in]0, 1[$ mit

$$\hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in Z_0, \quad \hat{\eta}_2 \in P^{-1}(K_\delta(0)\backslash\{0\}) \cap Z_0,$$

wobei Z_0 die Zusammenhangskomponente von $P^{-1}(K_1(0)\backslash\{0\})$ mit $\hat{\omega}_0 \in Z_0$ ist.
Damit folgt aus der Definition von Y_0, $\Phi(p, \cdot)$ und $v^{(1,1)}(p, \cdot)$
für $\hat{\eta}_2 \in P^{-1}(K_\delta(0)\backslash\{0\}) \cap Z_0$:

$$\begin{aligned} Y_0(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) &= \left(\Phi\left(p, \hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)\right), \hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)^{\alpha_0}\, \Phi\left(\tau_0(p), \hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)\right)\right) \\ &= \left(\tilde{\Phi}(p, \xi_2(\eta_1, \eta_2)), \hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)^{\alpha_0}\, \tilde{\Phi}(\tau_0(p), \xi_2(\eta_1, \eta_2))\right), \qquad (8.55) \\ Y_{0,\nu}(\hat{\eta}_2) &= \left(\tilde{F}(-\nu, -\nu^*, 1-\alpha_0; \eta_2), \hat{\eta}_2^{\alpha_0} \tilde{F}(\alpha_0 - \nu, \alpha_0 - \nu^*, 1+\alpha_0; \eta_2)\right). \end{aligned}$$

Aufgrund von (7.36)iv) gilt

$$\hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2)^{\alpha_0}\,\hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2)^{\alpha_0}=\hat{\eta}_2^{\alpha_0}\hat{\eta}_1^{\alpha_0},\quad \hat{\eta}_2\in P^{-1}\left(K_\delta(0)\backslash\{0\}\right)\cap Z_0.$$

Somit folgt mit dem Umlaufverhalten von $\hat{\xi}_1$ in (7.29), sowie (7.35):

$$\hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2)^{\alpha_0}=\hat{\eta}_2^{\alpha_0}h(\eta_2),\quad \hat{\eta}_2\in P^{-1}\left(K_\delta(0)\backslash\{0\}\right)\cap Z_0$$

mit $h:K_\delta(0)\to\mathbb{C}$ holomorph. Da wir

$$\xi_2(\eta_1,\eta_2)=\mathcal{O}(\eta_2),\quad \eta_2\to 0,\ (\eta_1,\eta_2)\in D$$

in (7.8)2. gezeigt haben, so folgt sofort über (8.55) und (8.54), dass sich $\mathbf{G}$ auf

$$S_A\cup(\{\infty\}\times\Omega)\cup\left(\mathbb{C}^*\backslash\overline{K}_1(0)\times\{0\}\right)$$

holomorph fortsetzen lässt.
Mit (8.55) und (8.54) folgt zudem für $\left(G_1,\tilde{G}_2\right):=\mathbf{G}$:

$$\lim_{\eta_2\to 0}\tilde{G}_2(\eta_1,\eta_2)=0 \text{ lokal gleichmässig bzgl. } \eta_1\in\mathbb{C}^*\backslash\overline{K}_1(0).$$

Aufgrund von (6.1) und (8.4) folgt für $(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2)\in\hat{S}_A$:

$$\begin{aligned}
G(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) &= Y_0(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2)\circ T\circ\begin{pmatrix} Y_{0,\nu}(\hat{\eta}_2)\\ Y'_{0,\nu}(\hat{\eta}_2)\end{pmatrix}^{-1}\\
&= \exp\left(\frac{\gamma}{2}\right)Y_1(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2)\circ\mathbf{Q}_{01}\circ T\circ\left(\mathbf{Q}_\nu^{01}\right)^{-1}\circ\begin{pmatrix} Y_{1,\nu}(\hat{\eta}_2)\\ Y'_{1,\nu}(\hat{\eta}_2)\end{pmatrix}^{-1}\\
&= \exp\left(\frac{\gamma}{2}\right)Y_1(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2)\circ\tilde{T}\circ\begin{pmatrix} Y_{2,\nu}(\hat{\eta}_2)\\ Y'_{2,\nu}(\hat{\eta}_2)\end{pmatrix}^{-1}.
\end{aligned}$$

Geht man nun analog zum Beweis der holomorphen Fortsetzbarkeit von $\mathbf{G}$ in

$$S_A\cup(\{\infty\}\times\Omega)\cup\left(\mathbb{C}^*\backslash\overline{K}_1(0)\times\{0\}\right)$$

vor, so erhält man die holomorphe Fortsetzbarkeit von $\mathbf{G}$ in

$$M:=S_A\cup(\{\infty\}\times\Omega)\cup\left(\mathbb{C}^*\backslash\overline{K}_1(0)\times\{0,1\}\right)$$

mit $\lim_{\eta_2\to 1}\tilde{G}_2(\eta_1,\eta_2)=0$ lokal gleichmässig bzgl. $\eta_1\in\mathbb{C}^*\backslash\overline{K}_1(0)$.
Die holomorphe Fortsetzung bezeichnen wir ebenfalls mit $\mathbf{G}$. Somit sind die Punkte $(\infty,0),(\infty,1)$ isolierte Singularitäten von $\mathbf{G}$. Aus einem Spezialfall des *Kugelsatzes* (siehe hierzu [5], Satz 1.3, Seite 34) folgt dann, dass sich $\mathbf{G}$ in den Punkten $(\infty,0),(\infty,1)$ holomorph fortsetzen lässt.
Wegen der obigen Überlegungen existiert eine holomorphe Funktion $G_2:M\to\mathbb{C}$ mit

$$\tilde{G}_2(\eta_1,\eta_2)=\eta_2(1-\eta_2)G_2(\eta_1,\eta_2),\ (\eta_1,\eta_2)\in M.$$

Insgesamt folgt damit die Behauptung 2.. □

Betrachtet man in (8.43)1. den Grenzwert für $\eta_2\to 1$ und in (8.43)2. den Grenzwert für $\eta_1\to\infty$, so kann man mit (7.35)ii)iii) Teilaussagen von [18] zur *analytischen Äquivalenz* (vgl. (1.20), (2.20) aus [18]) gewinnen.

8.7 Reihenentwicklungen von Produkten konfluenter Heunscher Funktionen

Für $p \in \Lambda$ betrachten wir die partielle Differentialgleichung $\tilde{A}_2 u = 0$, wobei $\tilde{A}_2$ in (1.12) definiert wurde, und entwickeln in diesem Abschnitt Lösungen der Form

$$U : \hat{S}_A \ni (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \to f \circ \hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \cdot g \circ \hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \mathbb{C},\ f, g \in \text{Kern}\,(L(p))\,, \tag{8.56}$$

nach separierten Lösungen der Form:

$$U_\nu : \widehat{\mathbb{C}^*} \times \widehat{\Omega} :\ni (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \to \tilde{u}_\nu\,(\hat{\eta}_1)\, v_\nu\,(\hat{\eta}_2) \in \mathbb{C}, \tag{8.57}$$

mit $\tilde{u}_\nu \in \text{Kern}\,(L^c_\nu(p))$, $v_\nu \in \text{Kern}\left(L^h_\nu(p)\right)$ und $\nu \in \Xi(p)$.
Hierbei wird der Normalfall $\nu - \nu^* \notin \mathbb{Z}$ vorausgesetzt.
Aufgrund von $\alpha_1^* - \nu + \alpha_0^* - \nu = \nu^* - \nu + 1$ folgt damit $\alpha_0^* - \nu \notin \mathbb{Z}$ oder $\alpha_1^* - \nu \notin \mathbb{Z}$.

(8.58) Satz:
Seien $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$, $\nu \in \Xi(p)$ mit $\nu - \nu^* \notin \mathbb{Z}$ und $f, g \in$ Kern$\,(L(p))$ mit $f \in \mathcal{V}_\nu(\infty)$. Dann gilt:

1. *Im Fall $\alpha_1^*(p) - \nu \notin \mathbb{Z}$ existiert genau eine Funktionenfolge $(v_{\nu+n})_{n\in\mathbb{Z}}$, $v_{\nu+n} \in$ Kern$\left(L^h_{\nu+n}(p)\right)$, mit*

   $$f \circ \hat{\xi}_1\,(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)\, g \circ \hat{\xi}_2\,(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} u^1_{\nu+n}\,(p, \hat{\eta}_1)\, v_{\nu+n}\,(\hat{\eta}_2)\,,\ (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{D}_A$$

   absolut lokal gleichmäßig.
   Ferner gilt für $n \in \mathbb{Z}$ und $\rho > 1$:

   $$v_{\nu+n}\,(\hat{\eta}_2) = \frac{\left\langle f \circ \hat{\xi}_1\,(\cdot, \hat{\eta}_2)\, g \circ \hat{\xi}_2\,(\cdot, \hat{\eta}_2)\,, u^2_{\nu^*-n}(p, \cdot)\right\rangle_c}{\left\langle u^1_{\nu+n}(p, \cdot), u^2_{\nu^*-n}(p, \cdot)\right\rangle_c},\ \hat{\eta}_2 \in \widehat{\mathcal{E}}(\rho)$$

   mit $\limsup\limits_{n\to\infty} \left(|v_{\nu+n}\,(\hat{\eta}_2)\,|\,(n!)^{-1}\right)^{\frac{1}{n}} = 0$ und $\limsup\limits_{n\to\infty} \left(|v_{\nu-n}\,(\hat{\eta}_2)\,|\,(n)!\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{|\gamma|\rho}{4}$ lokal gleichmäßig bezüglich $\hat{\eta}_2 \in \widehat{\mathcal{E}}(\rho)$, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle_c$ in (8.23) definiert wurde.

2. *Es existiert genau eine Funktionenfolge $(\tilde{u}_{\nu+n})_{n\in\mathbb{Z}}$, $\tilde{u}_{\nu+n} \in$ Kern$\left(L^c_{\nu+n}(p)\right)$, mit*

   $$g \circ \hat{\xi}_1\,(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)\, f \circ \hat{\xi}_2\,(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{u}_{\nu+n}\,(\hat{\eta}_1)\, v^\infty_{\nu+n}\,(p, \hat{\eta}_2)\,,$$
   $$(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{D}_A \cap \left(\widehat{\mathbb{C}^*} \times \widehat{\Omega}^+_\infty\right)$$

   absolut lokal gleichmäßig.
   Ferner gilt für $n \in \mathbb{Z}$ und $\rho > 1$:

   $$\tilde{u}_{\nu+n}\,(\hat{\eta}_1) = \frac{\left\langle g \circ \hat{\xi}_1\,(\hat{\eta}_1, \cdot)\, f \circ \hat{\xi}_2\,(\hat{\eta}_1, \cdot)\,, v^\infty_{\nu^*-n}(p, \cdot)\right\rangle_h}{\left\langle v^\infty_{\nu+n}(p, \cdot), v^\infty_{\nu^*-n}(p, \cdot)\right\rangle_h},\ \hat{\eta}_1 \in \widehat{\mathbb{C}^*} \backslash \overline{\hat{K}_\rho}$$

mit $\limsup_{n\to\infty}\left(\left|\tilde{u}_{\nu+n}\left(\hat{\eta}_1\right)\right|(n!)^2\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\rho}$ *und* $\limsup_{n\to\infty}\left(\left|\tilde{u}_{\nu-n}\left(\hat{\eta}_1\right)\right|(n!)^{-2}\right)^{\frac{1}{n}} \leq 1$ *lokal gleichmäßig bezüglich* $\hat{\eta}_1 \in \widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_\rho}$, *wobei* $\langle\cdot,\cdot\rangle_h$ *in (8.5) definiert wurde.*

Beweis: Wir zeigen 1.
Sei $\alpha_1^*(p) - \nu \notin \mathbb{Z}$ und $U_1(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) := f \circ \hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) g \circ \hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2),\ (\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) \in \hat{S}_A$.
Aufgrund von (7.29) gilt für $(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) \in \hat{S}_A$:

$$\begin{aligned} U_1\left(\delta_{2\pi}\left(\hat{\eta}_1\right),\hat{\eta}_2\right) &= f\left(\hat{\xi}_1\left(\delta_{2\pi}\left(\hat{\eta}_1\right),\hat{\eta}_2\right)\right) g\left(\hat{\xi}_2\left(\delta_{2\pi}\left(\hat{\eta}_1\right),\hat{\eta}_2\right)\right) \\ &= f\left(d_\infty \circ \hat{\xi}_1\left(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2\right)\right) g\left(\hat{\xi}_2\left(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2\right)\right) = \exp\left(2\pi i\nu\right) U_1\left(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2\right). \end{aligned}$$

Damit gilt für jedes $\rho > 1$: $U_1(\cdot,\hat{\eta}_2) \in \mathcal{U}_\nu(\rho)$, $\hat{\eta}_2 \in \widehat{\mathcal{E}}(\rho)$. Sei nun $\rho > 1$ fest gewählt.
Wegen (8.30) existiert eine Funktionenfolge $(A_n^\rho)_{n\in\mathbb{Z}}$ mit $A_n^\rho \in \mathcal{H}\left(\widehat{\mathcal{E}}(\rho)\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ und:

$$U_1(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n^\rho\left(\hat{\eta}_2\right) u_{\nu+n}^1(p,\hat{\eta}_1),\ (\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) \in \left(\widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_\rho}\right) \times \widehat{\mathcal{E}}(\rho)$$

absolut lokal gleichmäßig. Ferner folgt aus (8.30):

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\left|A_n^\rho\left(\hat{\eta}_2\right)\right|(n!)^{-1}\right)^{\frac{1}{n}} = 0, \quad \limsup_{n\to\infty}\left(\left|A_{-n}^\rho\left(\hat{\eta}_2\right)\right|(n)!\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{|\gamma|\rho}{4},\ \hat{\eta}_2 \in \widehat{\mathcal{E}}(\rho)$$

lokal gleichmäßig und

$$\begin{aligned} \left\langle u_{\nu+n}^1(p,\cdot), u_{\nu^*-n}^2(p,\cdot)\right\rangle_c A_n^\rho(\hat{\eta}_2) &= \left\langle U_1(\cdot,\hat{\eta}_2), u_{\nu^*-n}^2(p,\cdot)\right\rangle_c \\ &= \int_{\mathcal{C}} \varpi_1(-\alpha_0-\alpha_1,\gamma,\cdot)U_1(\cdot,\hat{\eta}_2)u_{\nu^*-n}^2(p,\cdot). \end{aligned}$$

Hierbei ist $\mathcal{C} : [0,1] \to \widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_\rho}$ eine Kurve mit $\tilde{P} \circ \mathcal{C}$ stückweise stetig-differenzierbar sowie $\delta_{2\pi}\left(\mathcal{C}(0)\right) = \mathcal{C}(1)$.
Mit dem Differentialoperator $\tilde{A}_2$ aus (1.12) und Satz (9.30) aus dem Anhang folgt die Behauptung, wobei man natürlich zu beachten hat, dass sich jede lokale Lösung von $L_{\nu+n}^h(p)v = 0$ auf $\widehat{\Omega}$ analytisch fortsetzen lässt.
2. folgt auf analoge Weise. □

(8.59) Satz:
Seien $p = (\alpha_0,\beta_0,\alpha_1,\beta_1,\hat{\gamma}) \in \Lambda$ *und* $\nu \in \Xi(p)$ *mit* $\nu - \nu^* \notin \mathbb{Z}$.

1. *Im Fall* $\nu \notin \{\alpha_0^*(p),\alpha_1^*(p)\} + \mathbb{Z}$ *gilt:*
   Für jedes $g \in Kern\left(L(p)\right)$ *existiert genau eine Funktionenfolge* $(v_{\nu+n})_{n\in\mathbb{Z}}$, $v_{\nu+n} \in Kern\left(L_{\nu+n}^h(p)\right)$, *mit:*

$$\Psi\left(p,\hat{\xi}_1\left(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2\right)\right) g\left(\hat{\xi}_2\left(\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2\right)\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} H_{\nu+n}^1\left(p,\hat{\eta}_1\right) v_{\nu+n}\left(\hat{\eta}_2\right),\ (\hat{\eta}_1,\hat{\eta}_2) \in \hat{D}_A \tag{8.60}$$

absolut lokal gleichmäßig.
Ferner gilt für $n \in \mathbb{Z}$, $\rho > 1$ und $\hat{\eta}_2 \in \widehat{\mathcal{E}}(\rho)$:

$$v_{\nu+n}(\hat{\eta}_2) = \frac{\left\langle (\pi_\nu \Psi)\left(p, \hat{\xi}_1(\cdot, \hat{\eta}_2)\right) g\left(\hat{\xi}_2(\cdot, \hat{\eta}_2)\right), u^2_{\nu^*-n}(p,\cdot)\right\rangle_c}{\left\langle u^1_{\nu^*+n}(p,\cdot), u^2_{\nu^*-n}(p,\cdot)\right\rangle_c} \tag{8.61}$$

sowie $\limsup_{n\to\infty} \left(|v_{\nu\pm n}(\hat{\eta}_2)|\, n!\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\rho|\gamma|}{4}$ *lokal gleichmäßig bezüglich* $\hat{\eta}_2 \in \widehat{\mathcal{E}}(\rho)$.

2. *Im Fall $\alpha_0, \alpha_1 \notin \mathbb{Z}$ und $\nu \notin \{0, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_0+\alpha_1\} + \mathbb{Z}$ gilt:*
   Für jedes $g \in Kern(L(p))$ existiert genau eine Funktionenfolge $(\tilde{u}_{\nu+n})_{n\in\mathbb{Z}}$, $\tilde{u}_{\nu+n} \in Kern\left(L^c_{\nu+n}(p)\right)$, mit:

$$g\left(\hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)\right) \Phi\left(p, \hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{u}_{\nu+n}(\hat{\eta}_1)\, v^{(1,1)}_{\nu+n}(p, \hat{\eta}_2), \;\; (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{D}_A$$

   absolut lokal gleichmäßig.
   Ferner gilt für $n \in \mathbb{Z}$, $\rho > 1$ und $\hat{\eta}_1 \in \widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_\rho}$:

$$\tilde{u}_{\nu+n}(\hat{\eta}_1) = \frac{\left\langle g\left(\hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \cdot)\right)(\pi_\nu \Phi)\left(p, \hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \cdot)\right), v^\infty_{\nu^*-n}(p,\cdot)\right\rangle_h}{\left\langle \left(\pi_{\nu+n} v^{(1,1)}_{\nu+n}\right)(p,\cdot), v^\infty_{\nu^*-n}(p,\cdot)\right\rangle_h}, \tag{8.62}$$

   sowie $\limsup_{n\to\infty} \left(|\tilde{u}_{\nu\pm n}(\hat{\eta}_1)|\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\rho}$ *lokal gleichmäßig bezüglich* $\hat{\eta}_1 \in \widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_\rho}$.

Beweis:
Zum ersten Teil des Satzes.
Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$. Da die Voraussetzungen des Satzes (8.43)1. erfüllt sind, können wir mit dem dort definierten Isomorphismus $\mathbb{H}$ die Funktionen

$$f_\nu := \mathbb{H}(u^1_\nu(p,\cdot)), f_{\nu^*} := \mathbb{H}(u^1_{\nu^*}(p,\cdot)) \in \mathrm{Kern}\,(L(p))$$

definieren. Man rechnet leicht nach, dass $f_\nu \in \mathcal{V}_\nu(\infty)$ und $f_{\nu^*} \in \mathcal{V}_{\nu^*}(\infty)$ ist. Zudem erfüllt $\mathbb{H}$ nach Definition $\mathbb{H}\left(H^1_\nu(p,\cdot)\right) = \Psi(p,\cdot)$.
Da die Voraussetzungen des Satz (8.58) für ν und ν^* erfüllt sind, existieren eindeutige $v^1_{\nu+n}, v^2_{\nu^*-n} \in \mathrm{Kern}\left(L^h_\nu(p)\right)$ mit:

$$\begin{aligned} f_\nu\left(\hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)\right) g\left(\hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)\right) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} u^1_{\nu+n}(p, \hat{\eta}_1) v^1_{\nu+n}(\hat{\eta}_2), \\ f_{\nu^*}\left(\hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)\right) g\left(\hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)\right) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} u^1_{\nu^*-n}(p, \hat{\eta}_1) v^2_{\nu^*-n}(\hat{\eta}_2), \end{aligned} \tag{8.63}$$

für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{D}_A$, wobei die Reihen absolut lokal gleichmäßig konvergieren.
Aus (8.20) folgt

$$\frac{\sin \pi(\nu - \nu^*)}{\pi} H^1_\nu = u^1_\nu - u^1_{\nu^*}, \tag{8.64}$$

und wegen der Linearität von $\mathbb{H}$ gilt:

$$\frac{\sin \pi(\nu - \nu^*)}{\pi} \Psi\left(p, \cdot\right) \circ \hat{\xi}_1 = f_\nu \circ \hat{\xi}_1 - f_{\nu^*} \circ \hat{\xi}_1. \tag{8.65}$$

In (7.29) und (7.35) haben wir

$$\hat{\xi}_2\left(\delta_{2\pi}\left(\hat{\eta}_1\right), \hat{\eta}_2\right) = \hat{\xi}_2\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right), \quad (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{S}_A,$$

sowie $\hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \to \hat{\eta}_2$, $(\eta_1 \to \infty)$ lokal gleichmäßig für $\hat{\eta}_2 \in \widehat{\Omega}$ gezeigt.
Daher existiert für

$$M := \left\{(\eta_1, \hat{\eta}_2) \in \mathbb{C}^* \times \widehat{\Omega} | (\eta_1, \eta_2) \in D_A\right\} \dot{\cup} \left(\{\infty\} \times \widehat{\Omega}\right)$$

eine stetige partiell holomorphe Funktion $F : M \to \mathbb{C}$ mit

$$F\left(\eta_1, \hat{\eta}_2\right) := \begin{cases} g \circ \hat{\xi}_2\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right), & (\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{D}_A, \\ g(\hat{\eta}_2), & (\eta_1, \hat{\eta}_2) \in \{\infty\} \times \widehat{\Omega}. \end{cases}$$

Seien $h_1, h_2 : M \to \mathbb{C}$ die durch

$$h_j(\eta_1, \hat{\eta}_2) := H_j\left(\eta_1, \eta_2\right) F\left(\eta_1, \hat{\eta}_2\right), \ (\eta_1, \hat{\eta}_2) \in M \quad (j = 1, 2),$$

partiell holomorphen Funktionen mit H_1, H_2 aus (8.43).
Mit

$$h\left(\eta_1, \hat{\eta}_2\right) u\left(\hat{\eta}_1\right) := h_1(\eta_1, \hat{\eta}_2) u\left(\hat{\eta}_1\right) + h_2\left(\eta_1, \hat{\eta}_2\right) u'\left(\hat{\eta}_1\right)$$

für $u \in L_\nu^c(p)$ und $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{D}_A$ gilt dann:

$$\begin{aligned} f_\nu\left(\hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)\right) g\left(\hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)\right) &= h(\eta_1, \hat{\eta}_2) u_\nu^1(p, \hat{\eta}_1), \\ f_{\nu^*}\left(\hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)\right) g\left(\hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)\right) &= h(\eta_1, \hat{\eta}_2) u_{\nu^*}^1(p, \hat{\eta}_1), \\ \Psi^1\left(p, \hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)\right) g\left(\hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)\right) &= h(\eta_1, \hat{\eta}_2) H_\nu^1(p, \hat{\eta}_1) \end{aligned}$$

für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{D}_A$. Sei nun $\rho > 1$ und $\hat{\eta}_2 \in \widehat{\mathcal{E}}(\rho)$ fest.
Wir entwickeln die Funktionen $h_1(\cdot, \hat{\eta}_2), h_2(\cdot, \hat{\eta}_2)$ in Potenzreihen um ∞:

$$h_1(\eta_1, \hat{\eta}_2) =: \sum_{n=0}^{\infty} h_{1,n}(\hat{\eta}_2) \left(\frac{1}{\eta_1}\right)^n, \quad h_2(\eta_1, \hat{\eta}_2) =: \sum_{n=0}^{\infty} h_{2,n}(\hat{\eta}_2) \left(\frac{1}{\eta_1}\right)^n,$$

für $\eta_1 \in \mathbb{C}^* \backslash K_\rho(0)$ und bezeichnen die Partialsummen für $k \in \mathbb{N}$ mit

$$h_1^k(\eta_1, \hat{\eta}_2) := \sum_{n=0}^{k-1} h_{1,n}(\hat{\eta}_2) \left(\frac{1}{\eta_1}\right)^n, \quad h_2^k(\eta_1, \hat{\eta}_2) \ := \ \sum_{n=0}^{k-1} h_{2,n}(\hat{\eta}_2) \left(\frac{1}{\eta_1}\right)^n,$$

für $\eta_1 \in \mathbb{C}^* \backslash K_\rho(0)$. Hiermit definieren wir:

$$h^k(\eta_1, \hat{\eta}_2)\, u(\hat{\eta}_1) := h_1^k(\eta_1, \hat{\eta}_2) u(\hat{\eta}_1) + h_2^k(\eta_1, \hat{\eta}_2)\, u'(\hat{\eta}_1),$$

für $k \in \mathbb{Z}$, $u \in L_\nu^c(p)$ und $\hat{\eta}_1 \in \widehat{\mathbb{C}^*} \backslash \overline{\hat{K}_\rho}$. Über die Dreitermrekursionen der Funktionen $u_\nu^1(p,\cdot)$, $u_{\nu^*}^1(p,\cdot)$ und $H_\nu^1(p,\cdot)$, welche in [15] nachzulesen sind, erhält man:

$$\begin{aligned}
h^k(\eta_1, \hat{\eta}_2) u_\nu^1(p, \hat{\eta}_1) &=: \sum_{n=-k}^{k} c_n(\hat{\eta}_2, k) u_{\nu+n}^1(p, \hat{\eta}_1), \\
h^k(\eta_1, \hat{\eta}_2) u_{\nu^*}^1(p, \hat{\eta}_1) &=: \sum_{n=-k}^{k} c_n^*(\hat{\eta}_2, k) u_{\nu^*-n}^1(p, \hat{\eta}_1), \\
h^k(\eta_1, \hat{\eta}_2) H_\nu^1(p, \hat{\eta}_1) &=: \sum_{n=-k}^{k} \tilde{c}_n(\hat{\eta}_2, k) H_{\nu+n}^1(p, \hat{\eta}_1),
\end{aligned}$$

für $\hat{\eta}_1 \in \widehat{\mathbb{C}^*} \backslash \overline{\hat{K}_\rho}$. Andererseits folgt mit (8.64):

$$\begin{aligned}
&h^k(\eta_1, \hat{\eta}_2) u_\nu^1(p, \hat{\eta}_1) - h^k(\eta_1, \hat{\eta}_2) u_{\nu^*}^1(p, \hat{\eta}_1) = \frac{\sin \pi(\nu - \nu^*)}{\pi} h^k(\eta_1, \hat{\eta}_2) H_\nu^1(p, \hat{\eta}_1) \\
&= \frac{\sin \pi(\nu - \nu^*)}{\pi} \sum_{n=-k}^{k} \tilde{c}_n(\hat{\eta}_2, k) H_{\nu+n}^1(p, \hat{\eta}_1) \\
&= \sum_{n=-k}^{k} \tilde{c}_n(\hat{\eta}_2, k) u_{\nu+n}^1(p, \hat{\eta}_1) - \sum_{n=-k}^{k} \tilde{c}_n(\hat{\eta}_2, k) u_{\nu^*-n}^1(p, \hat{\eta}_1),
\end{aligned} \tag{8.66}$$

für $\hat{\eta}_1 \in \widehat{\mathbb{C}^*} \backslash \overline{\hat{K}_\rho}$. Somit gilt wegen $\mathcal{U}_\nu(\rho) \cap \mathcal{U}_{\nu^*}(\rho) = \{0\}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-k}^{k} c_n(\hat{\eta}_2, k) u_{\nu+n}^1(p, \cdot) &= \sum_{n=-k}^{k} \tilde{c}_n(\hat{\eta}_2, k) u_{\nu+n}^1(p, \cdot) \in \mathcal{U}_\nu(\rho), \\
\sum_{n=-k}^{k} c_n^*(\hat{\eta}_2, k) u_{\nu^*-n}^1(p, \cdot) &= \sum_{n=-k}^{k} \tilde{c}_n(\hat{\eta}_2, k) u_{\nu^*-n}^1(p, \cdot) \in \mathcal{U}_{\nu^*}(\rho).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$c_n(\hat{\eta}_2, k) = \tilde{c}_n(\hat{\eta}_2, k), \quad c_n^*(\hat{\eta}_2, k) = \tilde{c}_n(\hat{\eta}_2, k)$$

und damit

$$c_n(\hat{\eta}_2, k) = c_n^*(\hat{\eta}_2, k). \tag{8.67}$$

Außerdem gilt mit (8.63) und den Darstellungen von $v^1_{\nu+n}$ und $v^2_{\nu^*-n}$ in $\widehat{\mathcal{E}}(\rho)$:

$$\begin{aligned}
c_n(\hat\eta_2,k) =& \frac{\left\langle h^k(\cdot,\hat\eta_2)u^1_\nu(p,\cdot),u^2_{\nu^*-n}(p,\cdot)\right\rangle_c}{\left\langle u^1_{\nu+n}(p,\cdot),u^2_{\nu^*-n}(p,\cdot)\right\rangle_c}\\
&\longrightarrow \frac{\left\langle h(\cdot,\hat\eta_2)u^1_\nu(p,\cdot),u^2_{\nu^*-n}(p,\cdot)\right\rangle_c}{\left\langle u^1_{\nu+n}(p,\cdot),u^2_{\nu^*-n}(p,\cdot)\right\rangle_c} = v^1_{\nu+n}\left(\hat\eta_2\right),\\
c^*_n(\hat\eta_2,k) =& \frac{\left\langle h^k(\cdot,\hat\eta_2)u^1_{\nu^*}(p,\cdot),u^2_{\nu+n}(p,\cdot)\right\rangle_c}{\left\langle u^1_{\nu^*-n}(p,\cdot),u^2_{\nu+n}(p,\cdot)\right\rangle_c}\\
&\longrightarrow \frac{\left\langle h(\cdot,\hat\eta_2)u^1_{\nu^*}(p,\cdot),u^2_{\nu+n}(p,\cdot)\right\rangle_c}{\left\langle u^1_{\nu^*-n}(p,\cdot),u^2_{\nu+n}(p,\cdot)\right\rangle_c} = v^2_{\nu^*-n}\left(\hat\eta_2\right),
\end{aligned}$$

für $k\to\infty$ und $\hat\eta_2\in\widehat{\mathcal{E}}(\rho)$. Somit folgt mit (8.67) $v^1_{\nu+n}\left(\hat\eta_2\right) = v^2_{\nu^*-n}\left(\hat\eta_2\right)$ für alle $\hat\eta_2\in\widehat{\mathcal{E}}(\rho)$ und damit:

$$v^1_{\nu+n} = v^2_{\nu^*-n}. \tag{8.68}$$

Man erhält also für $(\hat\eta_1,\hat\eta_2)\in\hat D_A$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sin\pi(\nu-\nu^*)}{\pi}\Psi\left(p,\hat\xi_1\left(\hat\eta_1,\hat\eta_2\right)\right)g\left(\hat\xi_2\left(\hat\eta_1,\hat\eta_2\right)\right)\\
=\ & f_\nu\left(\hat\xi_1\left(\hat\eta_1,\hat\eta_2\right)\right)g\left(\hat\xi_2\left(\hat\eta_1,\hat\eta_2\right)\right) - f_{\nu^*}\left(\hat\xi_1\left(\hat\eta_1,\hat\eta_2\right)\right)g\left(\hat\xi_2\left(\eta_1,\eta_2\right)\right)\\
=\ & \sum_{n\in\mathbb{Z}} u^1_{\nu+n}\left(p,\hat\eta_1\right)v^1_{\nu+n}\left(\hat\eta_2\right) - \sum_{n\in\mathbb{Z}} u^1_{\nu^*-n}\left(p,\hat\eta_1\right)v^2_{\nu^*-n}\left(\hat\eta_2\right)\\
=\ & \frac{\sin\pi(\nu-\nu^*)}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} v^1_{\nu+n}\left(\hat\eta_2\right)H^1_{\nu+n}\left(p,\hat\eta_1\right)\\
=\ & \frac{\sin\pi(\nu-\nu^*)}{\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} v^2_{\nu^*-n}\left(\hat\eta_2\right)H^1_{\nu+n}\left(p,\hat\eta_1\right).
\end{aligned}$$

Ferner gilt mit (8.64), (8.65) und (8.40) wegen $\nu-\nu^*\notin\mathbb{Z}$ für $v_{\nu+n} := v^1_{\nu+n}$:

$$\begin{aligned}
v_{\nu+n}\left(\hat\eta_2\right) =& v^1_{\nu+n}\left(\hat\eta_2\right) = \frac{\left\langle f_\nu\left(\hat\xi_1(\cdot,\hat\eta_2)\right)g\left(\hat\xi_2(\cdot,\hat\eta_2)\right),u^2_{\nu^*-n}\right\rangle_c}{\left\langle u^1_{\nu+n},u^2_{\nu^*-n}\right\rangle_c}\\
=& \frac{\left\langle (\pi_\nu\Psi)\left(p,\hat\xi_1(\cdot,\hat\eta_2)\right)g\left(\hat\xi_2(\cdot,\hat\eta_2)\right),u^2_{\nu^*-n}\right\rangle_c}{\left\langle u^1_{\nu+n},u^2_{\nu^*-n}\right\rangle_c}, \quad \hat\eta_2\in\widehat{\mathcal{E}}(\rho).
\end{aligned}$$

Aufgrund von (8.58)1. gilt

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\left|v_{\nu+n}\left(\hat\eta_2\right)\right|(n!)^2\right)^{\frac{1}{n}} \le \frac{\rho|\gamma|}{4}, \quad \hat\eta_2\in\widehat{\mathcal{E}}(\rho) \text{ lokal gleichmäßig.}$$

Wegen (8.68) gilt zudem

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\left|v_{\nu-n}\left(\hat{\eta}_2\right)\right|(n!)^2\right)^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty}\left(\left|v_{\nu^*+n}\left(\hat{\eta}_2\right)\right|(n!)^2\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\rho|\gamma|}{4}.$$

Mit (8.34) folgt dann die absolut lokal gleichmäßige Konvergenz der Reihe. Die Eindeutigkeit der Folge $(v_{\nu+n})_{n\in\mathbb{Z}}$ folgt aus der Eindeutigkeit der Folgen $\left(v^1_{\nu+n}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\left(v^2_{\nu^*-n}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ in (8.63).

Den zweiten Teil des Satzes beweist man auf analoge Weise. $\square$

Wir bezeichnen im folgenden für $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ abkürzend:

$$\begin{aligned}
&\Phi^{(1,1)}(p,\cdot) := \Phi(p,\cdot),\ \Phi^{(1,2)}(p,\cdot) := (t_0\Phi)(p,\cdot),\ \Phi^{(2,1)}(p,\cdot) := (t_{01}\Phi)(p,\cdot),\\
&\Phi^{(2,2)}(p,\cdot) := (t_{01}t_0\Phi)(p,\cdot),\ \Psi^1(p,\cdot) := \Psi(p,\cdot),\ \Psi^2(p,\cdot) := \tilde{\Psi}(p,\cdot).
\end{aligned}$$

(8.69) Satz:

Seien $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$ mit $\alpha_0, \alpha_1 \notin \mathbb{Z}$ und $\nu \in \Xi(p)$ mit $\nu - \nu^* \notin \mathbb{Z}$ sowie $\nu \notin \{0, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_0 + \alpha_1\} + \mathbb{Z}$.

Dann gibt es Koeffizientenfolgen $\left(C^{(l,i,j)}_{\nu+n}(p)\right)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$, $l, i, j \in \{1, 2\}$ mit:

$$\Psi^l\left(p, \hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)\right)\Phi^{(i,j)}\left(p, \hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C^{(l,i,j)}_{\nu+n}(p) H^l_{\nu+n}(p, \hat{\eta}_1) v^{(i,j)}_{\nu+n}(p, \hat{\eta}_2)$$

absolut lokal gleichmäßig für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{D}_A$.

Die Koeffizienten $C^{(l,i,j)}_{\nu+n}(p)$, $n \in \mathbb{Z}$, $l, i, j \in \{1, 2\}$ sind eindeutig bestimmt.

Zudem gilt mit $C_{\nu+n}(p) := C^{(1,1,1)}_{\nu+n}(p)$, $n \in \mathbb{Z}$ und den Parametertransformationen aus (4.2):

1. $C^{(1,1,2)}_{\nu+n}(p) = C_{\nu-\alpha_0+n}\left(\tau_0\left(p\right)\right)$,
2. $C^{(1,2,1)}_{\nu+n}(p) = C_{\nu+n}\left(\tau^{-1}_{01}\left(p\right)\right)$,
   $C^{(1,2,2)}_{\nu+n}(p) = C_{\nu-\alpha_1+n}\left(\tau^{-1}_{01} \circ \tau_1\left(p\right)\right)$,
3. $C^{(2,1,1)}_{\nu+n}(p) = \exp\left(\gamma\right) C_{\nu+n}\left(\tau^{-1}_{\infty}\left(p\right)\right)$,
   $C^{(2,1,2)}_{\nu+n}(p) = \exp\left(\gamma\right) C_{\nu-\alpha_0+n}\left(\tau^{-1}_{\infty} \circ \tau_0\left(p\right)\right)$,
4. $C^{(2,2,1)}_{\nu+n}(p) = C_{\nu+n}\left(\tau^{-1}_{\infty} \circ \tau^{-1}_{01}\left(p\right)\right)$,
   $C^{(2,2,2)}_{\nu+n}(p) = C_{\nu-\alpha_1+n}\left(\tau^{-1}_{\infty} \circ \tau^{-1}_{01} \circ \tau_1\left(p\right)\right)$.

Beweis:

Sei $p \in \Lambda$.

Aufgrund von (8.59) existieren eindeutige $\tilde{u}_{\nu+n}(p,\cdot) \in \text{Kern}\left(L^c_{\nu+n}(p)\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, mit:

$$\Psi\left(p, \hat{\xi}_1\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right)\right)\Phi\left(p, \hat{\xi}_2\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right)\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{u}_{\nu+n}\left(\hat{\eta}_1\right) v^{(1,1)}_{\nu+n}\left(p, \hat{\eta}_2\right),\ \left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right) \in \hat{D}_A$$

absolut lokal gleichmäßig.
Ferner gilt für $n \in \mathbb{Z}$, $\rho > 1$:

$$\tilde{u}_{\nu+n}\left(p, \hat{\eta}_1\right) = \frac{\left\langle \Psi\left(p, \hat{\xi}_1\left(\hat{\eta}_1, \cdot\right)\right)\left(\pi_\nu \Phi\right)\left(p, \hat{\xi}_2\left(\hat{\eta}_1, \cdot\right)\right), v^\infty_{\nu^*-n}(p, \cdot)\right\rangle_h}{\left\langle \left(\pi_{\nu+n} v^{(1,1)}_{\nu+n}\right)(p, \cdot), v^\infty_{\nu^*-n}(p, \cdot)\right\rangle_h}, \;\; \hat{\eta}_1 \in \widehat{\mathbb{C}^*} \backslash \overline{\hat{K}_\rho}. \tag{8.70}$$

Mit Hilfe von (7.36) und (7.35)iii) zeigt man mit der Darstellung aus (8.70):

$$\tilde{u}_{\nu+n}\left(p, \hat{\eta}_1\right) = \hat{\eta}_1^{\alpha_0^*(p)-1} \mathcal{O}(1), \;\; (\eta_1 \to \infty),$$

für $\hat{\eta}_1 \in \widehat{\mathbb{C}^*} \backslash \overline{\hat{K}_1}$, $|\arg(\hat{\eta}_1) + \arg(\hat{\gamma})| \leq \frac{3\pi}{2} - \delta$, mit $\delta > 0$ beliebig klein.
Damit folgt auf übliche Weise die Existenz und die Eindeutigkeit eines $C^{(1,1,1)}_{\nu+n}(p) \in \mathbb{C}$ mit $\tilde{u}_{\nu+n}(p, \cdot) = C^{(1,1,1)}_{\nu+n}(p) H^1_{\nu+n}(p, \cdot)$. Hieraus folgt die erste Behauptung.
Nun werden wir mit den Transformationen aus (4.3) die übrigen Entwicklungen herleiten.
Vorher bemerken wir: In (8.39) haben wir $\tilde{\nu} := \nu - \alpha_0 \in \Xi(\tau_0(p))$ gezeigt. Ferner folgt $\tilde{\nu} - \tilde{\nu}^*(\tau_0(p)) = \nu - \nu^*$ und $\tilde{\nu} \in \{0, -\alpha_0 + \alpha_1, -\alpha_0, \alpha_1\} + \mathbb{Z} \Leftrightarrow \nu \in \{0, \alpha_0 + \alpha_1, \alpha_0, \alpha_1\} + \mathbb{Z}$.
Analoges gilt für $\tilde{\nu} := \nu - \alpha_1 \in \Xi(\tau_1(p))$.
Zu 1.: Aus (7.36) folgt $\left(\hat{\xi}_1\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right)\right)^{\alpha_0}\left(\hat{\xi}_2\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right)\right)^{\alpha_0} = \hat{\eta}_1^{\alpha_0} \hat{\eta}_2^{\alpha_0}$ für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{S}_A$.
Mit $\tilde{\nu} := \nu - \alpha_0 \in \Xi(\tau_0(p))$ gilt dann für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{D}_A$:

$$\begin{aligned}
& (t_0 \Psi)\left(p, \hat{\xi}_1\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right)\right)(t_0 \Phi)\left(p, \hat{\xi}_2\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right)\right) \\
= & \left(\hat{\xi}_1\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right)\right)^{\alpha_0} \Psi\left(\tau_0(p), \hat{\xi}_1\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right)\right)\left(\hat{\xi}_2\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right)\right)^{\alpha_0} \Phi\left(\tau_0(p), \hat{\xi}_2\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right)\right) \\
= & \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_{\tilde{\nu}+n}\left(\tau_0(p)\right) \hat{\eta}_1^{\alpha_0} H^1_{\tilde{\nu}+n}\left(\tau_0(p), \hat{\eta}_1\right) \hat{\eta}_2^{\alpha_0} v^{(1,1)}_{\tilde{\nu}+n}\left(\tau_0(p), \hat{\eta}_2\right) \\
= & \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_{\nu-\alpha_0+n}\left(\tau_0(p)\right) \hat{\eta}_1^{\alpha_0} H^1_{\nu-\alpha_0+n}\left(\tau_0(p), \hat{\eta}_1\right)\left(t_0 v^{(1,1)}_{\nu-\alpha_0+n}\right)\left(p, \hat{\eta}_2\right).
\end{aligned}$$

Aufgrund von (8.4) gilt $v^{(1,2)}_\nu = \left(t_0 v^{(1,1)}_{\nu-\alpha_0}\right)$ und unter Berücksichtigung von (8.17) gilt

$$\left(m\left(\hat{\gamma}, \hat{\eta}_1\right)\right)^a = \hat{\gamma}^a \hat{\eta}_1^a, \;\; \text{für } a \in \mathbb{C}, \;\; \hat{\eta}_1, \hat{\gamma} \in \widehat{\mathbb{C}^*}.$$

Mit $\alpha_0^*(\tau_0(p)) = \alpha_0^*(p) - \alpha_0$, folgt dann mit der Definition von $H^1_{\nu-\alpha_0}$ (siehe Abschnitt (8.3)):

$$\begin{aligned}
& \hat{\eta}_1^{\alpha_0} H^1_{\nu-\alpha_0}\left(\tau_0(p), \hat{\eta}_1\right) \\
= & \left(m\left(\hat{\gamma}, \hat{\eta}_1\right)\right)^{\nu-\alpha_0} \psi\left(\nu - \alpha_0 + 1 - \alpha_0^*(\tau_0(p)), 2(\nu - \alpha_0 + 1) + \alpha_0 - \alpha_1, m\left(\hat{\gamma}, \hat{\eta}_1\right)\right) \\
= & \hat{\gamma}^{\nu-\alpha_0} \hat{\eta}_1^\nu \psi\left(\nu + 1 - \alpha_0^*(p), 2(\nu+1) - \alpha_0 - \alpha_1, m\left(\hat{\gamma}, \hat{\eta}_1\right)\right) \\
= & \hat{\gamma}^{-\alpha_0} H^1_\nu\left(p, \hat{\eta}_1\right), \quad \hat{\eta}_1 \in \widehat{\mathbb{C}^*}.
\end{aligned} \tag{8.71}$$

Wegen (5.33) gilt $(t_0\Psi)(p,\cdot) = \hat{\gamma}^{-\alpha_0}\Psi(p,\cdot)$, und damit folgt

$$\begin{aligned}&\Psi\left(p, \hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)\right)(t_0\Phi)\left(p, \hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)\right)\\ &\qquad = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_{\nu-\alpha_0+n}(\tau_0(p))\, H^1_{\nu+n}(p, \hat{\eta}_1)\, v^{(1,2)}_{\nu+n}(p, \hat{\eta}_2),\end{aligned}$$

$(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{D}_A$ absolut lokal gleichmäßig.
Zu 2.: In (8.39) haben wir $\nu \in \Xi(p) = \Xi\left(\tau_{01}^{-1}(p)\right)$ gezeigt.
Aufgrund von (7.23) folgt wegen $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{D}_A \Leftrightarrow \left(\delta_{-\pi}(\hat{\eta}_1), \hat{T}(\hat{\eta}_2)\right) \in \hat{D}_A$ für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{D}_A$:

$$\begin{aligned}& \Psi\left(\tau_{01}^{-1}(p), d_1^{-1}\circ\hat{T}\left(\hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)\right)\right)\Phi\left(\tau_{01}^{-1}(p), \hat{T}\left(\hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)\right)\right)\\ = {}& \Psi\left(\tau_{01}^{-1}(p), \hat{\xi}_1\left(\delta_{-\pi}(\hat{\eta}_1), \hat{T}(\hat{\eta}_2)\right)\right)\Phi\left(\tau_{01}^{-1}(p), \hat{\xi}_2\left(\delta_{-\pi}(\hat{\eta}_1), \hat{T}(\hat{\eta}_2)\right)\right)\\ = {}& \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_{\nu+n}\left(\tau_{01}^{-1}(p)\right) H^1_{\nu+n}\left(\tau_{01}^{-1}(p), \delta_{-\pi}(\hat{\eta}_1)\right) v^{(1,1)}_{\nu+n}\left(\tau_{01}^{-1}(p), \hat{T}(\hat{\eta}_2)\right).\end{aligned}$$

Wegen (5.33) gilt für $\hat{z} \in \widehat{\Omega}$:

$$\begin{aligned}\Psi(p,\hat{z}) &= \left(t_{01}^{-1}\phi_1^{-1}\Psi\right)(p,\hat{z}) = \left(\phi_1^{-1}\Psi\right)\left(\tau_{01}^{-1}(p), \hat{T}(\hat{z})\right)\\ &= \Psi\left(\tau_{01}^{-1}(p), d_1^{-1}\circ\hat{T}(\hat{z})\right),\\ (t_{01}\Phi)(p,\hat{z}) &= \left(t_{01}^{-1}\Phi\right)(p,\hat{z}) = \Phi\left(\tau_{01}^{-1}(p), \hat{T}(\hat{z})\right),\end{aligned}$$

sowie mit (8.4):

$$v^{(1,1)}_{\nu+n}\left(\tau_{01}^{-1}(p), \hat{T}(\hat{z})\right) = \left(t_{01}^{-1}v^{(1,1)}_{\nu+n}\right)(p,\hat{z}) = v^{(2,1)}_{\nu+n}(p,\hat{z}).$$

Aufgrund von $\tau_{01}^{-1}(p) = (\alpha_1, -\beta_1, \alpha_0, -\beta_0, \delta_\pi(\hat{\gamma}))$ und $\alpha_0^*\left(\tau_{01}^{-1}(p)\right) = \alpha_0^*(p)$ erhalten wir für $\hat{\eta}_1 \in \widehat{\mathbb{C}^*}$:

$$\begin{aligned}& H^1_{\nu+n}\left(\tau_{01}^{-1}(p), \delta_{-\pi}(\hat{\eta}_1)\right)\\ &= \left(m\left(\delta_\pi(\hat{\gamma}), \delta_{-\pi}(\hat{\eta}_1)\right)\right)^\nu \cdot\\ &\quad \psi\left(\nu+1-\alpha_0^*(p), 2(\nu+1)-\alpha_0-\alpha_1, m\left(\delta_\pi(\hat{\gamma}), \delta_{-\pi}(\hat{\eta}_1)\right)\right).\end{aligned} \tag{8.72}$$

Da aus (8.17) sofort $m\left(\delta_\pi(\hat{\gamma}), \delta_{-\pi}(\hat{\eta}_1)\right) = m(\hat{\gamma}, \hat{\eta}_1)$, $\hat{\gamma}, \hat{\eta}_1 \in \widehat{\mathbb{C}^*}$ folgt, erhält man

$$\begin{aligned}&\Psi\left(p, \hat{\xi}_1(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)\right)(t_{01}\Phi)\left(p, \hat{\xi}_2(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2)\right)\\ &\qquad = \sum_{n\in\mathbb{Z}} C_{\nu+n}\left(\tau_{01}^{-1}(p)\right) H^1_{\nu+n}(p, \hat{\eta}_1)\, v^{(2,1)}_{\nu+n}(p, \hat{\eta}_2)\end{aligned} \tag{8.73}$$

absolut lokal gleichmäßig für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{D}_A$ und damit die erste Behauptung.
Aus (7.36) und (7.23) folgt für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{S}_A$:

$$\begin{aligned}
&\left(\hat{T} \circ \hat{\xi}_1 \left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right)\right)^{\alpha_1} \left(\hat{T} \circ \hat{\xi}_2 \left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right)\right)^{\alpha_1} \\
&\quad = \left(d_1 \circ \hat{\xi}_1 \left(\delta_{-\pi}\left(\hat{\eta}_1\right), \hat{T}(\hat{\eta}_2)\right)\right)^{\alpha_1} \left(\hat{\xi}_2 \left(\delta_{-\pi}\left(\hat{\eta}_1\right), \hat{T}(\hat{\eta}_2)\right)\right)^{\alpha_1} \\
&\quad = \left(\hat{\xi}_1 \left(\delta_{-\pi}\left(\hat{\eta}_1\right), \hat{T}(\hat{\eta}_2)\right)\right)^{\alpha_1} \left(\hat{\xi}_2 \left(\delta_{-\pi}\left(\hat{\eta}_1\right), \hat{T}(\hat{\eta}_2)\right)\right)^{\alpha_1} \\
&\quad = \delta_{-\pi}\left(\hat{\eta}_1\right)^{\alpha_1} \left(1 - \hat{\eta}_2\right)^{\alpha_1} = \exp\left(-i\pi\alpha_1\right) \hat{\eta}_1^{\alpha_1} \left(1 - \hat{\eta}_2\right)^{\alpha_1}.
\end{aligned}$$

In (8.39) haben wir $\Xi(\tau_1(p)) = \Xi(p) - \alpha_1$ gezeigt.
Mit $\nu - \alpha_1 \in \Xi(\tau_1(p))$ gilt dann mit (8.73) und dem gerade gezeigten für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{D}_A$:

$$\begin{aligned}
&\left(t_1\Psi\right)\left(p, \hat{\xi}_1\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right)\right) \left(t_1 t_{01}\Phi\right)\left(p, \hat{\xi}_2\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right)\right) \\
= &\left(\hat{T} \circ \hat{\xi}_1 \left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right)\right)^{\alpha_1} \Psi\left(\tau_1(p), \hat{\xi}_1\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right)\right) \cdot \\
&\left(\hat{T} \circ \hat{\xi}_2 \left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right)\right)^{\alpha_1} \left(t_{01}\Phi\right)\left(\tau_1(p), \hat{\xi}_2\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right)\right) \\
= &\sum_{n\in\mathbb{Z}} C_{\nu-\alpha_1+n}\left(\tau_{01}^{-1} \circ \tau_1(p)\right) \exp\left(-i\pi\alpha_1\right) \hat{\eta}_1^{\alpha_1} H^1_{\nu-\alpha_1+n}\left(\tau_1(p), \hat{\eta}_1\right) \cdot \\
&\left(1 - \hat{\eta}_2\right)^{\alpha_1} v^{(2,1)}_{\nu-\alpha_1+n}\left(\tau_1(p), \hat{\eta}_2\right).
\end{aligned}$$

Wegen (8.4) gilt $v^{(2,2)}_\nu = \left(t_1 v^{(2,1)}_{\nu-\alpha_1}\right)$ und analog zu (8.71) gilt

$$\hat{\eta}_1^{\alpha_1} H^1_{\nu-\alpha_0}\left(\tau_1(p), \hat{\eta}_1\right) = \hat{\gamma}^{-\alpha_1} H^1_\nu\left(p, \hat{\eta}_1\right), \hat{\eta}_1 \in \widehat{\mathbb{C}^*}.$$

In (5.33) haben wir $\left(t_1\Psi\right)(p, \cdot) = \exp\left(-i\pi\alpha_1\right) \hat{\gamma}^{-\alpha_1} \Psi(p, \cdot)$ gezeigt, und damit folgt die Behauptung.
Zu 3.: In (8.39) haben wir $\Xi(p) = \Xi\left(\tau_\infty^{-1}(p)\right)$ gezeigt.
Aufgrund von (7.1) gilt $\xi_1(\eta_1, \eta_2) + \xi_2(\eta_1, \eta_2) = \eta_1 + 1$, $(\eta_1, \eta_2) \in S_A$.
Ferner gilt $t_\infty^{-1}\Phi = \Phi$ wegen (5.19) und damit folgt unter Berücksichtigung der Definition (5.29) von $\tilde{\Psi}$ für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{D}_A$:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Psi}\left(p, \hat{\xi}_1\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right)\right) \Phi\left(p, \hat{\xi}_2\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right)\right) \\
= &-\exp\left(i\pi\alpha_1^*(p)\right) \exp\left(\gamma\xi_1(\eta_1, \eta_2)\right) \Psi\left(\tau_\infty^{-1}(p), \hat{\xi}_1\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right)\right) \cdot \\
&\exp\left(\gamma\xi_2(\eta_1, \eta_2)\right) \Phi\left(\tau_\infty^{-1}(p), \hat{\xi}_2\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right)\right) \\
= &\sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp(\gamma)\, C_{\nu+n}\left(\tau_\infty^{-1}(p)\right) \left(-\exp\left(i\pi\alpha_1^*(p)\right)\right) \exp\left(\gamma\eta_1\right) H^1_{\nu+n}\left(\tau_\infty^{-1}(p), \hat{\eta}_1\right) \cdot \\
&v^{(1,1)}_{\nu+n}\left(\tau_\infty^{-1}(p), \hat{\eta}_2\right).
\end{aligned}$$

Mit der Definition von H_ν^2 und

$$v_\nu^{(1,1)}(p,\hat z) := F(-\nu, \nu+1-\alpha_0-\alpha_1, 1-\alpha_0; \hat z) = v_\nu^{(1,1)}\left(\tau_\infty^{-1}(p), \hat z\right), \ \ \hat z \in \widehat\Omega,$$

folgt dann die erste Behauptung.
Mit einer zu 1. analogen Argumentation folgt die zweite Behauptung. Zu 4.: Ausgehend von 3. gehen wir analog zu 2. vor und erhalten

$$\begin{aligned}
&\left(t_{01}^{-1}\phi_1^{-1}\tilde\Psi\right)\left(p, \hat\xi_1(\hat\eta_1,\hat\eta_2)\right)(t_{01}\Phi)\left(p,\hat\xi_2(\hat\eta_1,\hat\eta_2)\right)\\
=\ &\sum_{n\in\mathbb Z}\exp(-\gamma)C_{\nu+n}\left(\tau_\infty^{-1}\circ\tau_{01}^{-1}(p)\right)H_{\nu+n}^2\left(\tau_{01}^{-1}(p), \delta_{-\pi}(\hat\eta_1)\right)v_{\nu+n}^{(2,1)}(p,\hat\eta_2)
\end{aligned}$$

absolut lokal gleichmäßig für $(\hat\eta_1,\hat\eta_2)\in\hat D_A$.
Wegen (5.33) gilt $\left(t_{01}\tilde\Psi\right)(p,\hat z) = \exp(-\gamma)\left(\phi_1^{-1}\tilde\Psi\right)(p,\cdot)$ und damit folgt

$$\exp(-\gamma)\,\tilde\Psi(p,\hat z) = \left(t_{01}^{-1}\phi_1^{-1}\tilde\Psi\right)(p,\cdot).$$

Aufgrund von $\alpha_1^*(p) = \alpha_1^*(\tau_{01}(p))$, (8.18) und (8.72) folgt für $\hat\eta_1\in\widehat{\mathbb C^*}$:

$$\begin{aligned}
-\exp(-i\pi\alpha_1^*(p))H_{\nu+n}^2&\left(\tau_{01}^{-1}(p), \delta_{-\pi}(\hat\eta_1)\right)\\
&= \exp(\gamma\hat\eta_1)\,H_{\nu+n}^1\left(\tau_\infty^{-1}\circ\tau_{01}^{-1}(p), \delta_{-\pi}(\hat\eta_1)\right)\\
&= \exp(\gamma\hat\eta_1)\,H_{\nu+n}^1\left(\tau_{01}^{-1}\circ\tau_\infty^{-1}(p), \delta_{-\pi}(\hat\eta_1)\right)\\
&= \exp(\gamma\hat\eta_1)\,H_{\nu+n}^1\left(\tau_\infty^{-1}(p), \hat\eta_1\right)\\
&= -\exp(-i\pi\alpha_1^*(p))\,H_{\nu+n}^2(p,\hat\eta_1).
\end{aligned}$$

Damit erhält man die erste Behauptung. Die letzte Darstellung lässt sich dann analog zum zweiten Teil von 2. zeigen. □

(8.74) Satz:
Sei $p = (\alpha_0,\beta_0,\alpha_1,\beta_1,\hat\gamma)\in\Lambda$ und $\nu\in\Xi(p)$ mit $\nu-\nu^*\notin\mathbb Z$.

1. *Im Fall $\nu\notin\{\alpha_0^*(p),\alpha_1^*(p)\}+\mathbb Z$ gilt:*
   Für jedes $g\in Kern(L(p))$ existiert eine Funktionenfolge $(v_{\nu+n})_{n\in\mathbb Z}$, $v_{\nu+n}\in Kern\left(L_{\nu+n}^h(p)\right)$, mit

$$g(\hat\eta_2) = \sum_{n\in\mathbb Z} v_{\nu+n}(\hat\eta_2), \ \ \hat\eta_2\in\widehat\Omega,$$

   absolut lokal gleichmäßig. Die $v_{\nu+n}$, $n\in\mathbb Z$, haben die Eigenschaften aus (8.61).

2. *Im Fall $\alpha_0, \alpha_1 \notin \mathbb{Z}$ und $\nu \notin \{0, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_0 + \alpha_1\} + \mathbb{Z}$ gilt:*
   Für jedes $g \in Kern\left(L(p)\right)$ existiert eine Funktionenfolge $\left(\tilde{u}_{\nu+n}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\tilde{u}_{\nu+n} \in Kern\left(L^c_{\nu+n}(p)\right)$, mit

$$g\left(I_1(\hat{\eta}_1)\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{u}_{\nu+n}\left(\hat{\eta}_1\right), \; \hat{\eta}_1 \in \widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_1},$$

   absolut lokal gleichmäßig. Dabei ist $I_1 : \widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_1} \to \widehat{\Omega}$ aus (7.35). Die $\tilde{u}_{\nu+n}$, $n \in \mathbb{Z}$, haben die Eigenschaften aus (8.62).

3. *Im Fall $\alpha_0, \alpha_1 \notin \mathbb{Z}$ und $\nu \notin \{0, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_0 + \alpha_1\} + \mathbb{Z}$ gilt mit $I_0, I_1 : \widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_1} \to \widehat{\Omega}$ aus (7.35):*

$$\begin{aligned}
\Psi^l\left(p, I_1\left(\hat{\eta}_1\right)\right) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} C^{(l,1,1)}_{\nu+n}(p) H^l_{\nu+n}\left(p, \hat{\eta}_1\right), \\
\Psi^l\left(p, I_0\left(\hat{\eta}_1\right)\right) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} C^{(l,2,1)}_{\nu+n}(p) H^l_{\nu+n}\left(p, \hat{\eta}_1\right), \\
\Phi^{(i,j)}\left(p, \hat{\eta}_2\right) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} C^{(1,i,j)}_{\nu+n}(p) v^{(i,j)}_{\nu+n}\left(p, \hat{\eta}_2\right)
\end{aligned}$$

   absolut lokal gleichmäßig bezüglich $\hat{\eta}_1 \in \widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat{K}_1}$ beziehungsweise $\hat{\eta}_2 \in \widehat{\Omega}$.

Beweis:
Zu 1.: Sei $p = (\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1, \hat{\gamma}) \in \Lambda$. Im Fall $\nu \notin \{\alpha_0^*(p), \alpha_1^*(p)\} + \mathbb{Z}$ existiert aufgrund von Satz (8.59)1. genau eine Funktionenfolge $\left(v_{\nu+n}\right)_{n\in\mathbb{Z}}$, $v_{\nu+n} \in \text{Kern}\left(L^h(p)\right)$, $n \in \mathbb{Z}$ mit:

$$\Psi\left(p, \hat{\xi}_1\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right)\right) g\left(\hat{\xi}_2\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right)\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} H^1_{\nu+n}\left(p, \hat{\eta}_1\right) v_{\nu+n}\left(\hat{\eta}_2\right), \tag{8.75}$$

wobei die Reihe absolut lokal gleichmäßig für $(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2) \in \hat{D}_A$ konvergiert und die $v_{\nu+n}$, $n \in \mathbb{Z}$, die Eigenschaften aus (8.59) haben. Damit gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left|v_{\nu\pm n}\left(\hat{\eta}_2\right)\right| n!\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\rho|\gamma|}{4} \tag{8.76}$$

lokal gleichmäßig bezüglich $\hat{\eta}_2 \in \widehat{\mathcal{E}}(\rho)$.
Mit Hilfe der Transformation aus (8.24) lässt sich dann Satz (1.29) der Arbeit [10] anwenden und es folgt:

$$\Psi\left(p, \hat{\xi}_1\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right)\right) g\left(\hat{\xi}_2\left(\hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2\right)\right) \sim \hat{\gamma}^{\alpha_0^*(p)-1} \hat{\eta}_1^{\alpha_0^*(p)-1} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\tilde{c}_m\left(\hat{\eta}_2\right)}{m!}\left(\gamma\eta_1\right)^{-n}$$

für $(\hat\eta_1,\hat\eta_2)\in\widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat K_\rho}\times\widehat{\mathcal{E}}(\rho)$, $\eta_1\to\infty$ mit $|\arg(\hat\gamma)+\arg(\hat\eta_1)|<\frac{3\pi}{2}$.
Für die $\tilde c_m(\hat\eta_2)$, $m\in\mathbb{N}$, $\hat\eta_2\in\widehat{\mathcal{E}}(\rho)$ gilt:

$$\tilde c_m(\hat\eta_2)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}v_{\nu+n}(\hat\eta_2)\left(\nu+n+1-\alpha_0^*(p)\right)_m\left(\nu^*-n+1-\alpha_0^*(p)\right)_m.$$

Damit gilt

$$\hat\gamma^{1-\alpha_0^*(p)}\hat\eta_1^{1-\alpha_0^*(p)}\Psi\left(p,\hat\xi_1(\hat\eta_1,\hat\eta_2)\right)g\left(\hat\xi_2(\hat\eta_1,\hat\eta_2)\right)\to\tilde c_0(\hat\eta_2)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}v_{\nu+n}(\hat\eta_2),$$

für $(\hat\eta_1,\hat\eta_2)\in\widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat K_\rho}\times\widehat{\mathcal{E}}(\rho)$, $\eta_1\to\infty$ mit $|\arg(\hat\gamma)+\arg(\hat\eta_1)|\le\frac{3\pi}{2}-\delta$, $\delta>0$. Aufgrund von (7.36)i),iii) und (7.8) und mit (7.35) folgt

$$\hat\gamma^{1-\alpha_0^*(p)}\hat\eta_1^{1-\alpha_0^*(p)}\Psi\left(p,\hat\xi_1(\hat\eta_1,\hat\eta_2)\right)\to1,\quad g\left(\hat\xi_2(\hat\eta_1,\hat\eta_2)\right)\to g(\hat\eta_2),$$

für $(\hat\eta_1,\hat\eta_2)\in\widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat K_\rho}\times\widehat{\mathcal{E}}(\rho)$, $\eta_1\to\infty$. Damit folgt die Behauptung.
Zudem konvergiert die Reihe lokal absolut gleichmäßig wegen (8.76).
Auf analoge Weise folgt aus (8.69) für $\alpha_0,\alpha_1\notin\mathbb{Z}$ und $\nu\notin\{0,\alpha_0,\alpha_1,\alpha_0+\alpha_1\}+\mathbb{Z}$:

$$\Phi(p,\hat\eta_2)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}C_{\nu+n}(p)v_{\nu+n}^{(1,1)}(p,\hat\eta_2),$$

absolut und lokal gleichmäßig für $\hat\eta_2\in\widehat{\Omega}$.
Zu 2.: Sei $K\subset\widehat{\mathbb{C}^*}\backslash\overline{\hat K_\rho}$ kompakt. Mit (7.36)ii) folgt die Existenz eines $\delta\in]0,1[$ mit

$$\hat\xi_2(\hat\eta_1,\hat\eta_2)\in Z_0\text{ für }(\hat\eta_1,\hat\eta_2)\in K\times P^{-1}\left(K_\delta(0)\backslash\{0\}\right)\cap Z_0.$$

Betrachten wir die Reihe in (8.59)*2.*. Aus der Definitionen von Φ und $v_\nu^{(1,1)}$ folgt dann:

$$\begin{aligned}&g\left(\hat\xi_1(\hat\eta_1,\hat\eta_2)\right)\tilde\Phi\left(p,\xi_2(\eta_1,\eta_2)\right)=\\&g\left(\hat\xi_1(\hat\eta_1,\hat\eta_2)\right)\Phi^{(1,1)}\left(p,\hat\xi_2(\hat\eta_1,\hat\eta_2)\right)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde u_{\nu+n}(\hat\eta_1)\,v_{\nu+n}^{(1,1)}(p,\hat\eta_2)\\&=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde u_{\nu+n}(\hat\eta_1)\,\tilde F_1\left(-\nu,\nu+1-\alpha_0-\alpha_1,1-\alpha_0,\eta_2\right),\end{aligned}\tag{8.77}$$

für $(\hat\eta_1,\hat\eta_2)\in K\times\left(\widehat{\mathcal{E}}(\rho)\cap P^{-1}\left(K_\delta(0)\backslash\{0\}\right)\cap Z_0\right)$, wobei die Reihen absolut lokal gleichmäßig konvergieren. Sei nun $r<\delta$ klein genug mit $K_r(0)\backslash\{0\}\subset\mathcal{E}(\rho)$. Aus dem Maximumsprinzip folgt die absolut gleichmäßige Konvergenz der Reihe (8.77) für $(\hat\eta_1,\eta_2)\in K\times\overline{K_r(0)}$.
Betrachten wir nun in (8.77) $\eta_2\to0$, so erhalten wir mit mit (7.35)i)

$$g\left(I_1(\hat\eta_1)\right)\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_0)}=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_0)}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\tilde u_{\nu+n}(\hat\eta_1)$$

gleichmäßig für $\hat{\eta}_1 \in K$.
Auf analoge Weise folgt aus (8.69) für $\alpha_0, \alpha_1 \notin \mathbb{Z}$ und $\nu \notin \{0, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_0 + \alpha_1\} + \mathbb{Z}$:

$$\Psi\left(p, I_1\left(\hat{\eta}_1\right)\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_{\nu+n}(p) H^1_{\nu+n}\left(p, \hat{\eta}_1\right) \text{ lokal gleichmäßig für } \hat{\eta}_1 \in \widehat{\mathbb{C}^*} \setminus \overline{\hat{K}_1}.$$

Zu 3.: Die restlichen Entwicklungen lassen sich auf analoge Weise zeigen. □

(8.74)iii) liefert insbesondere die in [18],[10] und [19] untersuchten globalen Entwicklungen für den Fall der *CHE*.

In dieser Arbeit wurden keine Entwicklungen auf $\hat{D}_I$ untersucht.
Mit dem in (7.29) beschriebenen Umlaufverhalten von $\hat{\xi}_1$ und $\hat{\xi}_2$ lassen sich möglicherweise noch interessante Entwicklungen auf Teilgebieten von $\hat{D}_I$ finden. Hierauf gehen wir jedoch nicht mehr ein.

9 Anhang

Anhang 1

Die folgenden Definitionen, Bemerkungen und Sätze wurden, zum größten Teil unverändert, aus dem Buch *Riemannsche Flächen* von *Otto Forster* [3] übernommen. Für die Beweise der Sätze und Bemerkungen, verweisen wir daher auf dieses Buch.

(9.1) Definition: *Sei X eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Eine komplexe Karte auf X ist ein Homöomorphismus $\varphi : U \to V$ einer offenen Teilmenge $U \subset X$ auf eine offene Teilmenge $V \subset \mathbb{C}$. Zwei komplexe Karten $\varphi_i : U_i \to V_i$, $i = 1, 2$, heißen biholomorph verträglich, falls die Abbildung*

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

biholomorph ist.
Ein komplexer Atlas auf X ist ein System $\mathcal{U} := \{\varphi_i : U_i \to V_i | i \in I\}$ paarweise biholomorph verträglicher Karten, die X überdecken.
Zwei komplexe Atlanten $\mathcal{U}$ und $\mathcal{U}'$ heißen biholomorph verträglich, falls jede Karte von $\mathcal{U}$ mit jeder Karte von $\mathcal{U}'$ biholomorph verträglich ist.

(9.2) Definition: *Unter einer komplexen Struktur auf einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit X versteht man eine Äquivalenzklasse biholomorph äquivalenter Atlanten auf X.*

(9.3) Definition: *Eine Riemannsche Fläche ist ein Paar $(X, \sum)$ bestehend aus einer zusammenhängenden zweidimensionalen Mannigfaltigkeit X und einer komplexen Struktur $\sum$ auf X.*

(9.4) Definition: *Sei X eine Riemannsche Fläche und $Y \subset X$ eine offene Teilmenge. Eine Funktion $f : Y \to \mathbb{C}$ heisst holomorph, wenn für jede Karte $\phi : U \to V$ auf X die Funktion*

$$f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap Y) \to \mathbb{C}$$

im üblichen Sinn auf der offenen Menge $\phi(U \cap Y) \subset \mathbb{C}$ holomorph ist. Die Menge aller auf Y holomorphen Funktionen wird mit $\mathcal{O}(Y)$ bezeichnet.

(9.5) Definition: *Seien X und Y Riemannsche Flächen. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt holomorph, wenn für jedes Paar von Karten $\phi_1 : U_1 \to V_1$ auf X und $\phi_2 : U_2 \to V_2$ auf Y mit $f(U_1) \subset U_2$ die Abbildung*

$$\phi_2 \circ f \circ \phi_1^{-1} : V_1 \to V_2$$

holomorph im üblichen Sinn ist. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt biholomorph, wenn sie bijektiv ist und sowohl f wie auch f^{-1} holomorph sind.

(9.6) Satz: *(Identitätssatz) Seien X, Y Riemannsche Flächen und $f_1, f_2 : X \to Y$ zwei holomorphe Abbildungen, die auf einer Teilmenge $A \subset X$, die einen Häufungspunkt $a \in X$ besitzt, übereinstimmen. Dann sind f_1 und f_2 identisch.*

(9.7) Definition: *Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $p : Y \to X$ heißt unverzweigte Überlagerung falls sie lokal topologisch ist.*

(9.8) Definition: *Seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $p : Y \to X$ heißt unbegrenzte unverzweigte Überlagerung wenn folgendes gilt:*
Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine offene Umgebung U, so dass sich das Urbild $p^{-1}(U)$ darstellen läßt als:

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j,$$

wobei J eine beliebige Indexmenge ist, die $V_j, j \in J$ paarweise disjunkte offene Teilmengen von Y und alle Abbildungen $p|_{V_j} : V_j \to U$ Homöomorphismen sind.

(9.9) Satz: *Seien X, Y Hausdorff-Räume und $p : Y \to X$ eine unverzweigte Überlagerung.*

1. *Zu jeder Kurve $u : [0,1] \to X$ und jedem Punkt $y_0 \in Y$ mit $p(y_0) = u(0)$ gibt es genau eine Kurve : $\hat{u} : [0,1] \to Y$ von u mit $p \circ \hat{u} = u$ und $\hat{u}(0) = y_0$.*

2. *Seien $\hat{u}_1, \hat{u}_2 : [0,1] \to X$ Kurven mit $\hat{u}_1(0) = \hat{u}_2(0)$. Sind dann die Kurven $u_1 := p \circ \hat{u}_1$ und $u_2 := p \circ \hat{u}_2$ in X homotop, so haben $\hat{u}_1$ und $\hat{u}_2$ denselben Endpunkt und sind in Y homotop.*

(9.10) Satz: *Sei X eine Riemannsche Fläche, Y ein Hausdorff-Raum und $p : Y \to X$ eine unverzweigte Überlagerungsabbildung, dann gibt es genau eine komplexe Struktur auf Y, so daß p holomorph wird.*

(9.11) Definition: *Seien X, Y, Z topologische Räume und $p : Y \to X$ und $q : Z \to X$ unverzweigte Überlagerungen. Man nennt dann eine Abbildung $f : Y \to Z$ spurtreu falls $p = q \circ f$ gilt.*

(9.12) Definition: *Seien X, Y, Z topologische Räume und $p : Y \to X$ eine unverzweigte Überlagerung und $f : Z \to X$ eine stetige Abbildung. Unter einer Liftung von f bezüglich p versteht man eine stetige Abbildung $g : Z \to Y$ so dass $f = p \circ g$ gilt.*

(9.13) Satz: *Seien X, Y Hausdorfräume und $p : Y \to X$ eine unbegrenzte unverzweigte Überlagerung. Weiter sei Z ein einfach zusammenhängender, kurvenzusammenhängender und lokal kurvenzusammenhängender topologischer Raum und $f : Z \to X$ eine stetige Abbildung. Dann gibt es zu jeder Wahl von Punkten $z_0 \in Z, y_0 \in Y$ mit $f(z_0) = p(y_0)$ genau eine Liftung $\hat{f} : Z \to Y$, mit $\hat{f}(z_0) = y_0$.*

(9.14) Satz: *Seien X, Y, Z Riemannsche Flächen, $p : Y \to X$ eine holomorphe unverzweigte Überlagerung und $f : Z \to X$ eine holomorphe Abbildung. Dann ist jede Liftung $g : Z \to Y$ von f holomorph.*

(9.15) Definition: *Seien X und Y zusammenhängende topologische Räume und $p : Y \to X$ eine unverzweigte unbegrenzte Überlagerung.*
p heißt universelle Überlagerung, wenn sie folgende universelle Eigenschaft hat:
Zu jeder zusammenhängenden, unbegrenzten unverzweigten Überlagerung $q : Z \to X$

und zu jeder Wahl von Punkten $y_0 \in Y, z_0 \in Z$ mit $p(y_0) = q(z_0)$ gibt es genau eine stetige spurtreue Abbilldung $f : Y \to Z$ mit $f(y_0) = z_0$.

(9.16) Satz: *Seien X, Y zusammenhängende Mannigfaltigkeiten, Y einfach zusammenhängend und $p : Y \to X$ eine unbegrenzte unverzweigte Überlagerung. Dann ist p universelle Überlagerung von X.*

(9.17) Satz: *Sei X eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Dann existiert eine zusammenhängende, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit $\hat{X}$ und eine unverzweigte unbegrenzte Überlagerung $p : \hat{X} \to X$.*

(9.18) Bemerkung: *Insbesondere kann man damit zu jeder Riemannschen Fläche eine universelle Überlagerung konstruieren, die nach (9.10) in natürlicher Weise wieder eine Riemannsche Fläche ist.*

(9.19) Satz: *Sei X eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche. Dann läßt sich X biholomorph auf die Riemannsche Zahlenkugel $\mathbb{P}_1$, auf die Gaußsche Zahlenebene $\mathbb{C}$ oder auf den Einheitskreis $K_1(0) = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$ abbilden.*

(9.20) Satz: *Sei X eine nicht kompakte Riemannsche Fläche, $S \subset X$ eine abgeschlossene diskrete Teilmenge und $X' := X \backslash S$ und sei $p : Y \to X'$ die universelle Überlagerung von X'. Weiter sei (U, z) eine Koordinatenumgebung eines Punktes $a \in S$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *$z(U) \subset \mathbb{C}$ ist der Einheitskreis und $z(a) = 0$.*

2. *$U \cap S = \{a\}$.*

Sei Z irgendeine Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(U \backslash \{a\})$. Dann ist $p|_Z : Z \to U \backslash \{a\}$ die universelle Überlagerung von $U \backslash \{a\}$.

(9.21) Satz: *Sei X eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche, $a \in X$, $U \subset X$ eine offene Umgebung von a und $\varphi : U \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktion, die sich in X längs jeder von a ausgehenden Kurve analytisch fortsetzen lässt. Dann gibt es eine auf ganz X holomorphe Funktion f, mit $f|U = \varphi$.*

(9.22) Definition:

Seien X ein topologischer Raum, $a \in X$ ein Punkt und $\varphi_1, \varphi_2 : [0, 1] \to \mathbb{C}$ Kurven mit $\varphi_1(1) = a = \varphi_2(0)$. Dann sei

$$(\varphi_1 + \varphi_2) : [0, 1] \to X, \quad (\varphi_1 + \varphi_2)(t) := \begin{cases} \varphi_1(2t), \ t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \varphi_2(2t - 1), \ t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} .$$

Zudem bezeichnen wir die zu φ_1 entgegengesetzte Kurve durch

$$-\varphi_1 : [0, 1] \to X, \quad -\varphi_1(t) := \varphi_1(1 - t).$$

(9.23) Satz,Definition: *Sei X ein topologischer Raum und $a \in X$. Die Menge $\pi_1(X, a)$ aller Homotopieklassen von geschlossenen Kurven in X mit Anfangs- und*

Endpunkt a bildet mit der durch die Zusammensetzung von Kurven induzierten Verknüpfung eine Gruppe, die Fundamentalgruppe von X bzgl. des Basispunktes a.
Ist $b \in X$ ein von a verschiedener Punkt, der mit a durch eine Kurve in X verbunden werden kann, so gibt es einen Isomorphismus $f : \pi_1(X, a) \to \pi_1(X, b)$.

(9.24) Definition: *Seien X, Y topologische Räume und $p : Y \to X$ sei eine unverzweigte Überlagerung. Unter einer Decktransformation dieser Überlagerung versteht man einen Homöomorphismus $f : Y \to Y$ mit $p = p \circ f$. Die Menge aller Decktransformationen bildet bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe, die mit $D(Y/X)$ bezeichnet werde.*

(9.25) Satz: *Sei X eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit und $p : Y \to X$ ihre universelle Überlagerung. Dann gibt es zu jedem Punktpaar $(y_0, y_1) \in Y^2$ mit $p(y_0) = p(y_1)$ genau eine Decktransformation $f \in D(Y/X)$ mit $f(y_0) = y_1$. $D(Y/X)$ ist isomorph zur Fundamentalgruppe $\pi_1(X, a)$ $(a \in X)$.*

Anhang 2

Im folgenden benutzen wir, für unseren Zweck leicht modifizierte, Sätze aus [15].
Es seien $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ Gebiete und $p_0, p_1, p_2 \in H(G_1)$ sowie $q_0, q_1, q_2 \in H(G_2)$.
Wir definieren hiermit folgende Differentialoperatoren:

$$P_z : H(G_1) \longrightarrow H(G_1),\ P_z(w)(z) := p_0(z)w(z) + p_1(z)w'(z) + p_2(z)w''(z), \tag{9.26}$$

$$Q_t : H(G_2) \longrightarrow H(G_2),\ Q_t(w)(t) := q_0(t)w(t) + q_1(t)w'(t) + q_2(t)w''(t). \tag{9.27}$$

(9.28) Bemerkung: *Sei ω eine nicht triviale Lösung der Differentialgleichung*

$$(q_2\omega)' = q_1\omega, \tag{9.29}$$

Sei Q_t wie in (9.27) und $l : [a, b] \longrightarrow G_2$ eine stückweise stetig-differenzierbare Kurve. Dann gilt für beliebige $u, v \in H(G_2)$:

$$\int_l \omega \cdot (Q_t(u)v - uQ_t(v)) = \omega q_2 \cdot (vu' - uv')|_l.$$

Dies folgt sofort aus $(\omega q_2(vu' - uv'))' = \omega(Q_t(u)v - uQ_t(v))$.

(9.30) Satz:
Voraussetzungen:

1. *Seien P_z,Q_t und ω wie in (9.26),(9.27) und (9.29).*

2. *$K : G_1 \times G_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ sei eine stetige und partiell-holomorphe Funktion, die die partielle Differentialgleichung $P_z(K) = Q_t(K)$ löst.*

3. $v \in H(G_2)$ *löse* $Q_t(v) = 0$.

4. *Sei* c *eine stückweise-stetig differenzierbare Kurve, mit* $Spur(c) \subset G_2$. *Es gelte:*

   (a) *Für jedes* $z \in G_1$ *sei:*

$$\left(\omega q_2 \left(v \frac{\partial K(z,\cdot)}{\partial t} - K(z,\cdot) v' \right) \right) \Big|_c = 0.$$

   (b) *Im Fall, dass* c *ein uneigentlicher Integrationsweg ist, gelte:*
   Das uneigentliche Integral

$$u(z) := \int_c K(z,\cdot) \omega v$$

   existiere bzgl. $z \in G_1$ *lokal gleichmässig.*

Behauptung: Die Funktion $u : G_1 \to \mathbb{C}$ *ist holomorph und erfüllt* $P_z(u) = 0$.

Aus [1], Seite 224, entnehmen wir:

(9.31) Lemma (Jordansches Lemma): *Es sei eine Schar von Halbkreisen* $\mathfrak{h}_n$ *um* $s = 0$ *links von der imaginären Achse mit den Radien* ϱ_n *gegeben, wobei* $\varrho_0 < \varrho_1 < \ldots < \varrho_n \to \infty$. *Eine auf den Halbkreisen integrable Funktion* $f(s)$ *genüge auf dem Halbkreis mit* ϱ_n *der Abschätzung:* $|f(s)| \leq \delta_n, \quad$ *wo* $\delta_n \to 0$ $(n \to \infty)$.
Dann ist

$$\int_{\mathfrak{h}_n} \exp(ts) f(s) ds \to 0 \quad \textit{bei } t > 0 \textit{ für } n \to \infty.$$

10 Symbolregister

Literatur

[1] Gustav Doetsch, *Handbuch der Laplace-Transformation. Band I: Theorie der Laplace-Transformation*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1971, Verbesserter Nachdruck der ersten Auflage 1950, Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften. Mathematische Reihe, Band 14. MR MR0344807 (49 #9546)

[2] Arthur Erdélyi, Wilhelm Magnus, Fritz Oberhettinger, and Francesco G. Tricomi, *Higher transcendental functions. Vols. I, II*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1953, Based, in part, on notes left by Harry Bateman. MR MR0058756 (15,419i)

[3] Otto Forster, *Riemannsche Flächen*, Springer-Verlag, Berlin, 1977, Heidelberger Taschenbücher, Band 184. MR MR0447557 (56 #5867)

[4] Klaus Fritzsche and Hans Grauert, *From holomorphic functions to complex manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 213, Springer-Verlag, New York, 2002. MR MR1893803 (2003g:32001)

[5] Hans Grauert and Klaus Fritzsche, *Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher*, Springer-Verlag, Berlin, 1974, Hochschultext. MR MR0372232 (51 #8448)

[6] A. Ya. Kazakov, *Integral symmetries, integral invariants, and monodromy matrices for ordinary differential equations*, Teoret. Mat. Fiz. **116** (1998), no. 3, 323–335. MR MR1693885 (2000e:34150)

[7] ———, *Symmetries of the confluent Heun equation*, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) **275** (2001), no. Mat. Vopr. Teor. Rasprostr. Voln. 30, 55–71, 311. MR MR1854500 (2003i:34194)

[8] A. Ya. Kazakov and S. Yu. Slavyanov, *Integral equations for special functions of Heun class*, Methods Appl. Anal. **3** (1996), no. 4, 447–456. MR MR1437789 (97j:34031)

[9] ———, *Integral relations for special functions of the Heun class*, Teoret. Mat. Fiz. **107** (1996), no. 3, 388–396. MR MR1407468 (97k:34034)

[10] Theo Kurth and Dieter Schmidt, *On the global representation of the solutions of second-order linear differential equations having an irregular singularity of rank one in ∞ by series in terms of confluent hypergeometric functions*, SIAM J. Math. Anal. **17** (1986), no. 5, 1086–1103. MR MR853518 (87j:34017)

[11] Alfred Leitner and Josef Meixner, *Simultane Separierbarkeit von verallgemeinerten Schwingungsgleichungen.*, Arch. Math. **10** (1959), 387–391. MR MR0117362 (22 #8142)

[12] A. Ronveaux (ed.), *Heun's differential equations*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1995, With contributions by F. M. Arscott, S. Yu. Slavyanov, D. Schmidt, G. Wolf, P. Maroni and A. Duval. MR MR1392976 (98a:33005)

[13] F. W. Schäfke, *Zur (konfluenten) Fuchsschen Differentialgleichung* 2. *Ordnung*, Analysis **3** (1983), no. 1-4, 101–122. MR MR756109 (86b:34013)

[14] F. W. Schäfke and D. Schmidt, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer-Verlag, Berlin, 1973, Die Grundlagen der Theorie im Reellen und Komplexen, Heidelberger Taschenbücher, Band 108. MR MR0355146 (50 #7623)

[15] Friedrich Wilhelm Schäfke, *Einführung in die Theorie der speziellen Funktionen der mathematischen Physik*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 118, Springer-Verlag, Berlin, 1963. MR MR0157011 (28 #252)

[16] Reinhard Schäfke, *A connection problem for a regular and an irregular singular point of complex ordinary differential equations*, SIAM J. Math. Anal. **15** (1984), no. 2, 253–271. MR MR731866 (85f:34006)

[17] Reinhard Schäfke and Dieter Schmidt, *The connection problem for general linear ordinary differential equations at two regular singular points with applications in the theory of special functions*, SIAM J. Math. Anal. **11** (1980), no. 5, 848–862. MR MR586913 (82a:34010a)

[18] D. Schmidt, *Global representation for the solutions of second-order meromorphic differential equations by special functions*, Ordinary and partial differential equations, Vol. III (Dundee, 1990), Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 254, Longman Sci. Tech., Harlow, 1991, pp. 183–207. MR MR1158888 (93b:34015)

[19] Dieter Schmidt, *Die Lösung der linearen Differentialgleichung 2. Ordnung um zwei einfache Singularitäten durch Reihen nach hypergeometrischen Funktionen*, J. Reine Angew. Math. **309** (1979), 127–148. MR MR542043 (81d:34007)

[20] Dieter Schmidt and Gerhard Wolf, *A method of generating integral relations by the simultaneous separability of generalized Schrödinger equations*, SIAM J. Math. Anal. **10** (1979), no. 4, 823–838. MR MR533954 (81c:35019)

[21] Stephan Schultze, *Diplomarbeit*, Universität- GH Essen (1999).

[22] B. V. Shabat, *Introduction to complex analysis. Part II*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 110, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992, Functions of several variables, Translated from the third (1985) Russian edition by J. S. Joel. MR MR1192135 (93g:32001)